

Projet de fin d'études

Mesures de risque de marché pour les produits
dérivés : calcul et *backtesting*

Par

Hugo Bergeret

Sous la supervision du professeur

Bertrand Tavin

Table des matières

Introduction	3
Méthodologie	5
I. Théorie	6
1. Les mesures de risque de marché	6
1.1. La volatilité, premier paramètre de mesure du risque	7
1.1.1. Utilisation de l'écart-type pour mesurer la volatilité	7
1.1.2. <i>Exponentially Weighted Moving Average Volatility</i>	9
1.1.3. Modèles GARCH.....	10
1.2. <i>La Value-at-Risk (VaR)</i> , une mesure non-cohérente de risque.....	12
1.2.1. <i>Value-at-Risk</i> paramétriques et semi-paramétriques	13
1.2.1.1. <i>Value-at-Risk</i> Delta-Normale	13
1.2.1.1.1. Cas du portefeuille avec un unique actif.....	14
1.2.1.1.2. Cas du portefeuille de deux actifs ou plus.....	14
1.2.1.1.3. Utilisation du Delta pour les dérivés.....	15
1.2.1.2. <i>Value-at-Risk</i> Gamma-Normale.....	17
1.2.1.3. Distributions non normales	18
1.2.1.3.1. Loi de Student-t.....	19
1.2.1.3.2. Loi de Laplace	20
1.2.1.4. Développement de Cornish-Fisher.....	20
1.2.1.5. Modèles ARMA-GARCH.....	21
1.2.1.6. Théorie des valeurs extrêmes (TVE)	23
1.2.1.6.1. Cadre d'analyse.....	23
1.2.1.6.2. Théorème limite de Fisher-Tippet et distribution GEV	24
1.2.1.6.3. Estimation des paramètres de la distribution GEV.....	25
1.2.1.6.4. Distribution de Pareto Généralisée (DPG).....	26
1.2.1.6.5. Estimation des paramètres de la DPG	27
1.2.1.6.6. Calcul de la VaR-TVE.....	27
1.2.2. <i>Value-at-Risk</i> par simulation historique.....	28
1.2.2.1. Simulation historique	28
1.2.2.2. Simulation historique avec <i>Bootstrapping</i>	29
1.2.2.3. Calcul du prix des <i>futures</i> et des <i>calls</i> européens	30
1.2.2.4. Simulation du sous-jacent à un jour et calcul de VaR historique	31
1.2.3. <i>Value-at-Risk</i> par simulation Monte-Carlo.....	32
1.2.3.1. Théorie et application au calcul de π	32

1.2.3.2.	Application à la mesure du risque	34
1.3.	Les mesures cohérentes de risque	34
1.3.1.	<i>Tail Conditional Expectation</i> (TCE).....	36
1.3.2.	Mesures de Wang.....	37
1.3.3.	Calcul de la TCE	38
1.3.3.1.	Calcul de la TCE des modèles paramétriques	38
1.3.3.1.1.	TCE en fonction de la distribution	38
1.3.3.1.2.	Utilisation du modèle Delta/Gamma-Normal pour les dérivés	39
1.3.3.1.3.	TCE dans le cadre de la Théorie des Valeurs Extrêmes	39
1.3.3.2.	TCE pour les simulations historiques, Monte-Carlo et ARMA-GARCH	40
2.	Quelles mesures pour les produits dérivés ?.....	41
2.1.	Cas de l'exposition linéaire	41
2.2.	Cas de l'exposition non-linéaire.....	41
3.	Validation de modèle et <i>backtesting</i>	42
3.1.	Validation de modèle <i>a priori</i>	42
3.1.1.	Test de normalité.....	42
3.1.2.	ACF et PACF	43
3.1.3.	Ljung-Box Q-Test.....	43
3.1.4.	Tests ARCH de Engle.....	44
3.1.5.	Test de <i>Goodness-of-fit</i> de Pearson	44
3.2.	<i>Backtesting a posteriori</i>	45
3.3.	Tests statistiques	46
3.3.1.	Tests de couverture.....	46
3.3.1.1.	« <i>Traffic Light test</i> ».....	46
3.3.1.2.	Test de Kupiec.....	48
3.3.2.	Test d'indépendance de Christoffersen	49

Introduction

Le calcul du risque de marché revêt une importance grandissante à l'ère de la mondialisation financière et de la libre circulation des capitaux. En effet, la crise de 2008 a démontré la nécessité de considérer le calcul du risque de marché comme partie intégrante des activités bancaires. Les faillites de plusieurs banques, dont la tristement célèbre Lehman Brothers, ont mis en danger l'intégralité du système bancaire et sont autant de preuves du besoin de mesurer les risques encourus.

Les facteurs expliquant ce besoin de contrôle se comprennent par la structure même du marché financier. Premièrement, il existe un risque du fait de l'incertitude qui règne quant aux événements à venir (hausse ou baisse des prix des matières premières, politiques de taux d'intérêt etc.). Deuxièmement, les pertes et profits des institutions financières sont influencés par ces mouvements de marché, c'est ce qu'on appelle l'exposition. En effet, les positions n'étant pas intégralement couvertes, les mouvements du marché impactent les banques. Si ces deux facteurs peuvent apparaître comme un danger pour les banques, ils leur permettent néanmoins de s'enrichir. Les rendements d'un placement sont fonction du niveau de risque, dans la mesure où plus un placement est risqué, plus les gains potentiels sont élevés. La clé semble, en définitive, être le choix d'un niveau de risque que l'organisation est prête à supporter dans l'attente de profits : on parle d'aversion au risque.

Ainsi, le défi principal des institutions est de connaître, étant donnée leur exposition, à quel niveau de risque elles font face comparé au niveau d'aversion au risque des dirigeants. C'est précisément le sujet de cette étude : les mesures de risque de marché.

Face à ce défi, les initiatives se sont multipliées, à la fois de la part des banques elles-mêmes mais aussi de la part d'organisations internationales. En effet, pionnière en termes de mesure du risque, la banque J.P. Morgan a, dès 1989, commencé à développer des mesures de risque quotidiennes à la demande de l'un de ses dirigeants. L'idée était alors de développer une méthodologie permettant de calculer et d'expliquer l'ensemble des risques de la banque. De cette requête est née, avec la collaboration de Reuters, la documentation RiskMetrics popularisant divers concepts tels que l'utilisation de l'écart-type (« *standard deviation* » en anglais), la *Value-at-Risk* (VaR) et l'*Expected Shortfall* (ES) ou *Tail Conditional Expectation* (TCE). Elle fut vite reprise par divers acteurs du système bancaire et organismes de contrôle à l'instar du Comité de Bâle.

Du fait de l'incertitude inhérente au marché, les mesures de risque s'appuient presque toutes sur un cadre probabiliste dont les événements incertains constituent précisément l'objet d'étude. Dès lors, les moyens disponibles sont, au mieux, des estimations du risque et non des manières de le calculer effectivement, comme nous pourrions le croire. Ainsi il convient également de considérer, tout comme en probabilités, le niveau de confiance désiré pour lesdites mesures : c'est-à-dire le degré de fiabilité recherché.

En pratique les banques développent des modèles mathématiques sur lesquels sont fondées les mesures. Ces modèles s'échafaudent autour des données disponibles à un instant T, qui servent à la fois à leur élaboration et à leur validation. Malheureusement, les variations du marché (sur lesquelles sont fondés les modèles prédictifs) ne sont pas fixes. Il est donc indispensable de confronter les prédictions *a priori* à la réalité du marché *a posteriori* : c'est ce que l'on appelle le *backtesting*.

En outre, si les mesures de risque de marché se focalisent sur l'impact des variations de marché sur les positions de la banque, il est nécessaire d'effectuer une distinction parmi les produits financiers en isolant les produits dérivés. De fait, les produits tels que les actions sont directement soumis aux mouvements de leur cours, leur exposition est donc linéaire aux fluctuations du marché. En ce qui concerne les produits dérivés, certains sont non-linéairement liés aux cours des sous-jacents, à l'instar d'un *call* européen sur le S&P 500 car le mouvement du S&P 500 n'impacte pas linéairement le *call*.

L'objet de ce rapport est ainsi d'étudier les différentes solutions existantes pour estimer le risque de marché et leur pertinence dans le cas des produits dérivés.

Méthodologie

La problématique adoptée dans notre étude est la suivante : « Comment estimer au mieux le risque de marché des produits dérivés et contrôler la pertinence de ces estimations ? ».

La réponse à celle-ci suivra un développement en deux parties. La première, théorique, aura pour objet d'établir l'état de l'art des méthodes de calcul du risque de marché, avant d'évaluer théoriquement leur pertinence pour les produits dérivés, pour finalement détailler les méthodes empiriques de contrôle et de validation des modèles de calcul du risque.

La seconde s'intéressera à l'implémentation des méthodes décrites dans la première partie dans l'environnement informatique RStudio (langage R) ainsi qu'à leur *backtesting*.

Les produits choisis pour cette seconde partie sont :

- Un *call* européen sur le S&P500 de maturité constante d'un mois (30 jours),
- Un *future* sur le S&P500 de maturité constante d'un mois (30 jours).

Dans cette seconde partie, trois éléments se distinguent :

- La détermination des meilleurs modèles paramétriques et semi-paramétriques pour les rendements du S&P500 : ARMA-GARCH/eGARCH, blocs de maxima et *peaks-over-threshold*,
- Le calcul des P&L utilisés pour le *backtesting* des instruments (*future* et *call* européen),
- Le calcul effectif des métriques de risque du S&P500, du *future*, de l'option et l'analyse de leur performance au regard du P&L (*backtesting*).

Le dernier élément se scinde lui-même en deux en fonction du type de mesure calculée, les mesures paramétriques ainsi que semi-paramétriques et les mesures par simulation et *repricing* des dérivés. Les mesures de risque seront calculées à l'horizon un jour et aux niveaux de confiance 95% et 99%.

I. Théorie

1. Les mesures de risque de marché

Avant de plonger dans l'étude des mesures de risque de marché il apparaît nécessaire de définir celles-ci. Soit X un facteur de risque (facteur portant ce risque), alors une mesure de risque est une fonction $\rho(X)$ qui quantifie de manière objective le niveau de danger associé au facteur de risque. Le facteur de risque X est une variable aléatoire dont la valeur est une fonction de l'état de la nature. On note Ω , l'ensemble des états de la nature. Ainsi X prend ses valeurs dans : $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$. Une mesure de risque se définit alors de l'ensemble des facteurs de risque dans \mathbb{R} . L'ensemble des facteurs de risque est noté \mathcal{G} . On obtient donc qu'une mesure de risque ρ est une fonction telle que :

$$\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

Lorsque le nombre $\rho(X)$ est positif, il est interprété comme le montant minimal de capital que l'agent économique doit ajouter à une position risquée X et investir prudemment dans l'instrument sans risque, afin de supprimer le risque. Au contraire, en cas de valeur négative de $\rho(X)$, alors le montant de capital $-\rho(X)$ peut être retiré à la position risquée ou perçu comme une restitution dans le cas des marchés organisés. Une mesure de risque permet, en résumé, de quantifier le risque en termes de capital. Les cas intéressants seront donc ceux où la mesure sera positive : un risque existe et il convient d'allouer une certaine quantité de capital à sa couverture.

Pour aller plus loin, on peut distinguer les mesures de risque cohérentes¹ et non cohérentes. Une mesure cohérente vérifie les axiomes suivants (avec X et Y des facteurs de risque, c une quantité positive et r l'actif sans risque) :

- **Invariance par translation** : $\rho(X + c \times r) = \rho(X) - c$
- **Sous-additivité** : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- **Homogénéité positive** : $\rho(c \times X) = c \times \rho(X)$ avec c un réel positif
- **Monotonie** : $P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

Ces propriétés sont considérées comme de « *bonnes propriétés* » par Artzner, Delbaen et Eber car elles correspondent à l'utilisation des mesures de risque afin de déterminer le capital nécessaire pour faire face aux pertes. Elles sont celles qui reproduisent le comportement du capital.

La première propriété signifie que le fait d'ajouter (resp. de soustraire) le montant c à la position risquée X et de l'investir dans l'instrument sans risque, diminue (resp. augmente) simplement la mesure du risque du portefeuille. La deuxième se résume à dire que l'ajout d'une position risquée Y au portefeuille ne crée pas de risque supplémentaire comparé au cumul des risques des deux positions indépendantes. C'est l'effet de la diversification. La troisième assertion correspond au fait qu'à l'augmentation de la quantité d'actif risqué correspond une augmentation proportionnelle du

¹ ARTZNER, Philippe, DELBAEN, Freddy, EBER, Jean-Marc, et al. Coherent measures of risk. Mathematical finance, 1999, vol. 9, no 3.

risque lui-même. Cela paraît en effet raisonnable d'affirmer que si l'on double la quantité d'actif risqué, alors on double le risque. Finalement, la dernière propriété permet de dire que si un facteur de risque est plus risqué qu'un autre, alors le capital nécessaire pour faire face aux pertes (la mesure de risque) conservera cet ordre.

Dans le cadre de notre étude, les produits dérivés ont comme sous-jacent le S&P500. Le facteur de risque X du document sera ici presque toujours les rendements du S&P500. Dans la suite les notions de facteur de risque et de rendements seront donc interchangeables.

1.1. La volatilité, premier paramètre de mesure du risque

Concept clé en finance, la volatilité est une mesure statistique de la dispersion des rendements pour un titre ou un indice de marché donné. Dans la plupart des cas, plus la volatilité est élevée, plus l'instrument est risqué. La volatilité est souvent mesurée comme l'écart-type ou la variance des rendements de ce même titre ou indice de marché. Sur les marchés des valeurs mobilières, la volatilité est souvent associée à de fortes fluctuations dans un sens ou dans l'autre. Par exemple, lorsque le marché boursier varie à la hausse et à la baisse de plus d'un pour cent sur une période prolongée, on parle de marché « volatil ». La volatilité d'un actif est un facteur clé dans l'évaluation des contrats d'options. Elle représente à la fois la potentialité de gain si les variations futures sont favorables à la position détenue, mais aussi le risque encouru si les variations y sont défavorables.

L'hypothèse sous-jacente à l'utilisation de la volatilité dans le calcul des risques futurs est que la volatilité passée d'un actif permet d'estimer l'ampleur de ses variations futures et donc son risque. Toutefois une question persiste : Comment mesurer efficacement la volatilité d'un actif ?

1.1.1. Utilisation de l'écart-type pour mesurer la volatilité

La notion mathématique d'écart-type se définit comme une mesure de dispersion par rapport à la moyenne. C'est plus précisément la racine du moment d'ordre deux de la variable centrée associée à une variable aléatoire, comme définie ci-dessous (en supposant l'existence d'un tel moment).

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - E(X))^2]} \quad (2)$$

avec $E(\cdot)$ l'espérance mathématique et X une variable aléatoire

L'écart-type est en pratique utilisé pour calculer la volatilité d'un échantillon en prenant la moyenne quadratique des écarts par rapport à la moyenne empirique. Cela permet, en termes non mathématiques, d'obtenir la distance moyenne entre les observations étudiées et la moyenne des observations.

L'hypothèse permettant de procéder ainsi est que chacune des valeurs de l'échantillon statistique ait la même probabilité (équiprobabilité) : la variable aléatoire correspondante suit donc une loi uniforme. On a alors :

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \text{ ou encore } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

avec x_i qui désigne les valeurs de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) et \bar{x} la moyenne empirique de l'échantillon

La présence du $n - 1$ ou d'un n au dénominateur s'explique par des notions statistiques de biais qui ne méritent pas d'être abordées ici.

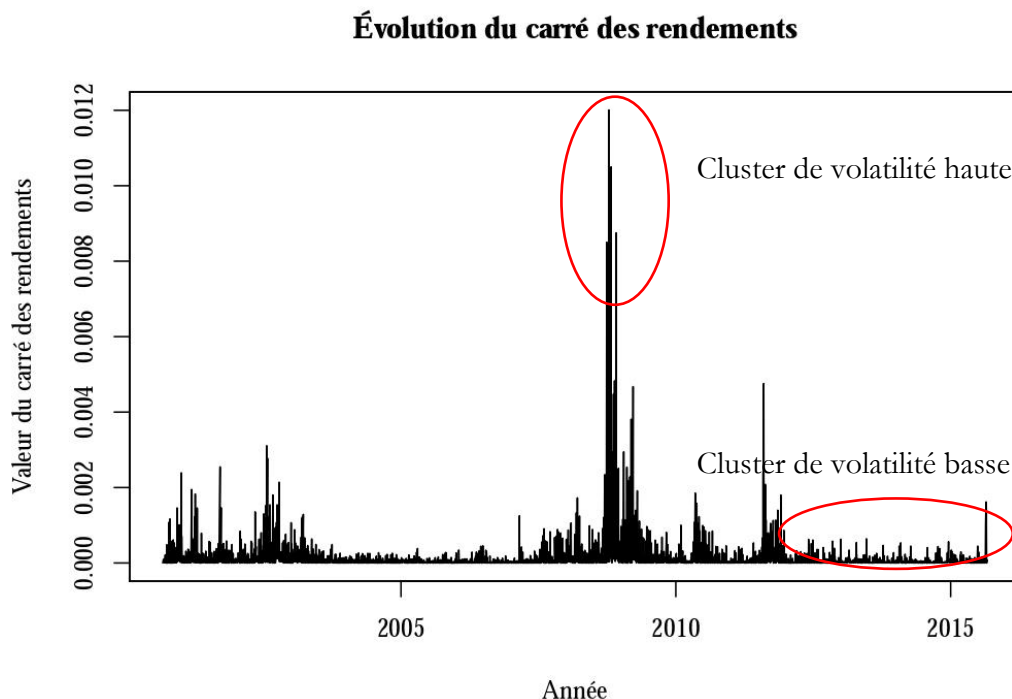
La moyenne empirique se calcule, quant à elle, intuitivement de la façon suivante :

$$\bar{x} = \mu_X = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

Toutefois, l'hypothèse d'équiprobabilité paraît bien naïve. Prenons l'exemple du calcul de la volatilité des rendements d'un actif avec la méthode ci-dessus sur un an de données. Le résultat obtenu donnera autant d'importance aux valeurs d'il y a un an qu'à celles de la semaine dernière, ce qui ne représente pas le comportement réel des marchés financiers. On observe en réalité un phénomène appelé « *volatility clustering* » qui se traduit par une persistance de la volatilité : un grand mouvement de prix sera souvent suivi par un autre grand mouvement, pas nécessairement dans le même sens. En définitive, on dit que la volatilité conditionnelle n'est pas constante.

Pour illustrer cela, les carrés des rendements du S&P500 sont présentés ci-dessous (2000-2015) et il apparaît clairement qu'il y a une corrélation positive entre les carrés des rendements lors de courts intervalles de temps.

Figure 1 : Autocorrélation du carré des rendements du S&P500



Mathématiquement, cela s'observe par une corrélation positive des carrés des rendements d'un actif sur une courte période de temps :

$$\text{Corr}(r_t^2, r_{t+1}^2) > 0 \quad (5)$$

avec Corr la corrélation des rendements et r_t le rendement de l'actif à l'instant t

La méthode « naïve » qui consiste à prendre une volatilité constante est donc peu adaptée aux données financières. Heureusement, il existe des manières de remédier à cette inexactitude : les modèles de volatilité stochastique (volatilité qui varie avec le temps).

1.1.2. Exponentially Weighted Moving Average Volatility

Une réponse au problème soulevé précédemment consiste à affecter aux rendements des poids qui donneront une importance plus ou moins grande aux observations. Nous nous éloignons alors du cadre équiprobabiliste évoqué dans le paragraphe antérieur. Pour refléter l'effet du temps sur la volatilité, des poids diminuant exponentiellement au fil du temps sont utilisés en pratique. Les rendements récents auront donc une pondération supérieure aux plus anciens. Cette méthode est communément appelée « *Exponentially Weighted Moving Average Volatility* ». Mathématiquement, elle s'exprime ainsi :

$$\text{EWMA: } \sigma_{R,\lambda,n} = \sqrt{(1-\lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} (r_i - \bar{r})^2} \quad (6)$$

avec $\sigma_{R,\lambda,n}$ la volatilité des rendements R (r_1 le dernier rendement), \bar{r} la moyenne empirique des rendements,

λ le facteur de diminution et n la taille de l'échantillon retenu

On introduit donc un facteur de décroissance exponentielle, ici noté λ , qui définit la vitesse à laquelle les poids attribués aux observations vont diminuer (plus le facteur est petit et plus la diminution sera rapide). On définit également un horizon temporel n , correspondant au nombre de valeurs à prendre en compte dans le calcul. En pratique, on considère souvent que la moyenne empirique est nulle (ce qui fonctionne assez bien avec les rendements d'actifs financiers qui sont très proches de 0). Il devient alors possible d'actualiser la volatilité quotidiennement en utilisant celle du jour précédant et le rendement observé la veille.

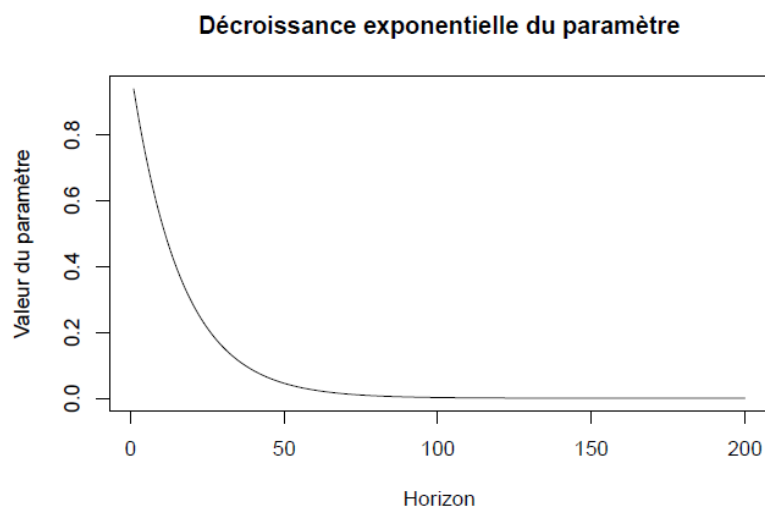
$$\text{RiskMetrics: } \sigma_t = \sqrt{\lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2} \quad (7)$$

avec σ_t la volatilité de l'échantillon au jour t et r_{t-1} le rendement observé au jour $t-1$

Cette méthodologie a été introduite par la documentation RiskMetrics², proposée par J.P. Morgan et Reuters, qui préconise un poids $\lambda = 0,94$ pour un horizon temporel de 1 jour.

² LONGERSTAEY, Jacques et SPENCER, Martin. Riskmetricstm—technical document. Morgan Guaranty Trust Company of New York: New York, 1996, vol. 51.

Figure 2 : Décroissance exponentielle du paramètre de RiskMetrics ($\lambda = 0,94$)



Le graphique ci-dessus présente la décroissance exponentielle des poids affectés aux observations passées et montre ainsi que plus une observation est ancienne, moins sa pondération sera importante.

Si cette méthodologie permet d'estimer la volatilité avec un meilleur degré de précision que les mesures sans pondérations, elle pose le problème de la non stationnarité. En effet, en utilisant quotidiennement cette méthode, les chocs de volatilité (jours avec rendements exceptionnels positifs ou négatifs) influencent de manière définitive la volatilité future car ils seront indéfiniment pris en compte dans le calcul des volatilités futures. Or, en pratique les cours ont tendance à retourner vers une valeur de volatilité à long terme une fois le choc passé, on parle de « *mean reversion* ».

1.1.3. Modèles GARCH

Pour répondre au problème de stationnarité soulevé précédemment d'autres modèles sont utilisés comme ceux de la classe ARCH³ qui, eux, prennent en compte le phénomène de « *mean reversion* ». En particulier, c'est le modèle GARCH⁴ qui est le plus plébiscité par les institutions financières s'agissant des calculs de volatilité. Il introduit un terme correspondant à la volatilité inconditionnelle (volatilité moyenne à long-terme), vers laquelle le processus reviendra après les chocs, ainsi que des coefficients dont la somme doit être strictement inférieure à 1 pour assurer la stationnarité, contrairement au modèle précédent où $(\lambda + (1 - \lambda) = 1)$.

³ ENGLE, Robert F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica*, 1982, vol. 50, no 4.

⁴ ENGLE, Robert F. et BOLLERSLEV, Tim. Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric reviews*, 1986, vol. 5, no 1, p. 1-50.

On appelle ces modèles GARCH car :

- C'est une généralisation des modèles ARCH (*Generalized*)
- La volatilité de demain est une fonction de celle d'aujourd'hui (*AutoRegressive et Conditional*),
- La volatilité varie au fil du temps (*Heteroskedastic*).

La différence entre le modèle GARCH et le modèle RiskMetrics est que le premier intègre une composante représentant la volatilité moyenne à long-terme (ω) qui permet la stationnarité du processus. Par ailleurs, ce modèle intègre ce que l'on appelle des innovations, chocs ou erreurs (ϵ_t) qui suivent une loi de probabilité, à déterminer, ajoutant de fait une dimension aléatoire au processus. Il permet, de plus, de sélectionner les plages temporelles prises en compte dans le calcul de volatilité (les paramètres p et q). On parle alors de modèle GARCH (p, q) en fonction du choix.

$$GARCH(p, q): \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (8)$$

avec ϵ_t les innovations qui sont des bruits blancs i. i. d

On dit que dans ce processus $\omega = \lambda V$ avec V la variance inconditionnelle et λ le paramètre de « *mean reversion* ». Les coefficients α_i gouvernent l'impact du choc passé : plus il est important plus la volatilité augmentera après le choc. Les coefficients β_j représentent, eux, la vitesse de retour à la volatilité minimale ω . En pratique, c'est souvent le modèle GARCH (1,1) qui est retenu par les institutions financières en raison de sa simplicité et de sa précision. Son équation est la suivante :

$$GARCH(1,1): \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (9)$$

Dans certains cas, on considère que les rendements sont la somme de leur moyenne (proche de zéro) et de la dernière innovation. C'est le modèle ARMA(0,0) qui sera vu dans la section dédiée aux modèles ARMA-GARCH. C'est-à-dire que :

$$r_t = \mu + \epsilon_t \quad (10)$$

Si bien que l'on pourra remplacer les innovations par les rendements dans la formule GARCH(1,1) et on obtiendra alors que pour un modèle ARMA(0,0)-GARCH(1,1) :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (11)$$

Finalement en considérant que le terme ω est nul, on obtiendra :

$$\sigma_t = \sqrt{\beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha r_{t-1}^2} \quad (12)$$

Ce qui, en prenant $\alpha = \lambda$ et $\beta = 1 - \lambda$, donne la volatilité EWMA. Ainsi, le modèle EMWA est un cas particulier de GARCH (1,1) où $\omega = 0$ et $\epsilon_t = r_t$.

Une variante du modèle GARCH, le modèle eGARCH, consiste à modéliser la log-variance plutôt que la variance du processus. Elle a pour avantage principal de prendre en compte l'asymétrie de l'impact des innovations. En effet, le modèle eGARCH permet de donner un impact différent aux chocs positifs et négatifs sur la variance conditionnelle. Mathématiquement, le modèle eGARCH(p,q) se note ainsi :

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^p \left(\alpha_k \epsilon_{t-k} + \gamma_k (|\epsilon_{t-k}| - E(|\epsilon_{t-k}|)) \right) + \sum_{k=1}^q \beta_k \log \sigma_{t-k}^2 \quad (13)$$

Les coefficients α et γ sont ceux qui permettent de prendre en compte l'asymétrie dont nous parlions précédemment.

1.2. La Value-at-Risk (VaR), une mesure non-cohérente de risque

La VaR est une mesure de risque de marché correspondant aux pertes qui ne devraient pas être dépassées sur un horizon temporel donné avec un niveau de confiance donné. Elle a la spécificité d'être simple à mettre en place et de fournir une valeur numérique quantifiant le risque. Mathématiquement, on considère un portefeuille dont la valeur à l'instant T est notée P_T et on se place sur un horizon temporel allant de 0 (maintenant) à un instant T dans le futur. La perte de valeur du portefeuille (ou le gain) durant l'intervalle de temps vaut $P_T - P_0$. La VaR à l'horizon temporel T et au niveau de confiance α est alors la valeur $-x$ qui satisfait l'équation suivante :

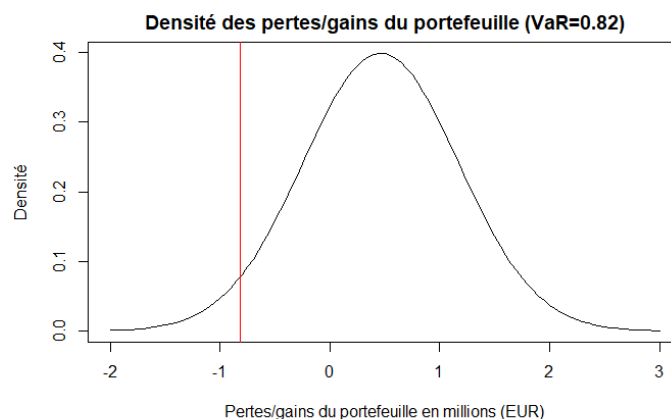
$$P(P_T - P_0 \leq x) = 1 - \alpha \quad (14)$$

avec α le niveau de confiance, $P_T - P_0$ la perte et x le quantile à définir ($-VaR$)

C'est-à-dire que c'est l'opposé du quantile $1 - \alpha$ de la distribution des pertes/gains du portefeuille sur l'horizon T . Nous faisons ici le choix de noter la VaR positivement, en tant que perte, afin de souscrire à la définition des mesures de risque faite précédemment comme montant de capital. On pourrait tout aussi bien la noter négativement en tant que résultat réalisé sur la période.

Dire qu'une banque a une VaR de 0,82 million d'euros à 1 jour au niveau de confiance 90% signifie que les pertes de la banque ne dépasseront pas 0,82 million d'euros sur un jour, et cela avec une probabilité de 90%. Graphiquement cela correspond au 10^{ème} centile de la distribution des pertes/gains du portefeuille sur 1 jour, comme présenté ci-dessous.

Figure 3 : Représentation de la Value-at-Risk d'un portefeuille comme quantile



La VaR est une quantité qui peut s'exprimer soit en montant absolu, comme ci-dessus, soit en pourcentage de la valeur du portefeuille. On préférera cette seconde option car plus commode en pratique.

En outre, il existe différentes approches au calcul de VaR et l'on différencie généralement les approches probabilistes, qui supposent que les rendements du portefeuille (pertes ou gains) suivent une distribution particulière (normale, loi student etc.), des approches historiques, qui utilisent les données historiques des rendements pour simuler les pertes/gains futurs.

1.2.1. *Value-at-Risk* paramétriques et semi-paramétriques

Les méthodes paramétriques consistent à attribuer une distribution aux rendements des facteurs de risque du portefeuille étudié, et à utiliser les propriétés de la distribution retenue pour estimer le risque de marché. Les méthodes semi-paramétriques sont, quant à elles, plus complexes mais intègrent toujours une composante à loi de probabilité prédéterminée. Ce sont donc des méthodes probabilistes.

La clé de voûte de ces méthodes est le choix de la distribution qui détermine, avec la volatilité du portefeuille, le quantile correspondant à la VaR (99^{ème} centile des pertes pour la VaR 99% ou 95^{ème} centile pour la VaR 95%, par exemple).

Dans la suite de notre étude nous considérerons deux cas : celui d'un portefeuille composé d'un unique actif et celui d'un portefeuille de deux actifs ou plus. Ce choix est effectué à des fins pédagogiques, dans la mesure où la partie empirique de notre étude étudiera deux portefeuilles distincts contenant chacun un unique actif.

1.2.1.1. *Value-at-Risk* Delta-Normale

Ce modèle formule les hypothèses suivantes sur les rendements du portefeuille étudié :

- Les rendements du portefeuille s'expriment linéairement en fonction des facteurs de risque qui le composent (les rendements du sous-jacent par exemple),
- Les rendements des facteurs de risque sont normalement distribués.

De plus, il utilise la propriété très accommodante de stabilité par combinaison linéaire de la loi normale qui permet de considérer qu'une combinaison linéaire de gaussiennes est encore gaussienne.

1.2.1.1.1. Cas du portefeuille avec un unique actif

Dans ce cas le portefeuille est constitué d'un unique actif. Si celui-ci est une action par exemple, alors la valeur du portefeuille dépend totalement des rendements de cette action, qui sont donc supposés normalement distribués (par hypothèse). En utilisant les propriétés de la loi normale, on obtient donc que la VaR du portefeuille à horizon T et au degré de confiance α est :

$$-VaR_{T,\alpha} = \sigma \times N^{-1}(1 - \alpha) \times \sqrt{T} \quad (+\mu) \quad (15)$$

avec σ la volatilité des rendements de l'action,

N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

T l'horizon temporel et μ la moyenne des rendements de l'action.

La dernière partie entre parenthèses est souvent ignorée car on considère que la moyenne des rendements est nulle (très proche de 0 pour les rendements financiers). Ainsi le seul paramètre nécessaire est la volatilité. Les niveaux de confiance utilisés sont en général 95% et 99%, ce qui donne, avec les propriétés de la loi normale centrée réduite :

$$N^{-1}(0,05) \approx -1,65 \quad (16)$$

$$N^{-1}(0,01) \approx -2,33 \quad (17)$$

1.2.1.1.2. Cas du portefeuille de deux actifs ou plus

Dans le cas où la valeur du portefeuille dépend de plusieurs actifs, il est nécessaire de prendre en considération les covariances entre les rendements de ceux-ci. En effet, la diversification du portefeuille impacte la volatilité du portefeuille total. Considérons maintenant un portefeuille de deux actifs. On aura alors :

$$\Delta P = w_1 R_1 + w_2 R_2$$

$$V_{\Delta P} = V(w_1 R_1 + w_2 R_2) \text{ et } E_{\Delta P} = E(w_1 R_1 + w_2 R_2) \quad (18)$$

avec $V_{\Delta P}$ la variance des rendements du portefeuille,

$E_{\Delta P}$ l'espérance des rendements du portefeuille et w_1 et w_2 les poids respectifs dans le portefeuille

Cela donne ensuite après développement :

$$\sigma_{\Delta P} = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \text{cov}(R_1, R_2)} \text{ et } \mu_{\Delta P} = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 \quad (19)$$

avec $\text{cov}(R_1, R_2)$ la covariance des rendements des deux actifs, σ_1 et σ_2 leur écart – types

et μ_1 et μ_2 leur moyennes.

On obtient ainsi finalement, pour la VaR du portefeuille, l'équation finale :

$$-VaR_{T,\alpha} = \sigma_{\Delta P} \times N^{-1}(1 - \alpha) \times \sqrt{T} \quad (+\mu_{\Delta P}) \quad (20)$$

Remarque :

- Quel que soit le type du portefeuille, nous exploitons les propriétés de la loi normale pour permettre le passage d'une VaR à un jour à une VaR à un autre horizon temporel :

$$VaR_{T,\alpha,x} = \sqrt{T} \times VaR_{1,\alpha,x}$$

- Dans le cas où le portefeuille contient plus de 2 actifs, la méthode reste la même mais il sera nécessaire d'effectuer les calculs sous forme matricielle en utilisant la matrice de variance-covariance des rendements des actifs.

1.2.1.1.3. Utilisation du Delta pour les dérivés

Nous avons expliqué précédemment comment calculer la VaR d'un portefeuille en étudiant directement les rendements des actifs qui le composent. Ceci est faisable pour un portefeuille constitué d'instruments financiers simples, tels que des actions par exemple, dont on peut considérer que le facteur de risque est le rendement de l'action lui-même.

Toutefois, dans le cas de produits plus complexes tels que les produits dérivés (*futures*, options etc.), les calculs ne peuvent être effectués directement et il est nécessaire de définir la manière avec laquelle les facteurs de risque affectent le produit. Il faut donc parvenir à une relation entre les dérivés et les facteurs de risque.

L'hypothèse retenue est que les rendements du portefeuille (ΔP) sont une combinaison linéaire des rendements des différents facteurs de risque qui le composent (R). Des coefficients sont introduits pour représenter l'impact d'une variation du facteur de risque sur le prix du portefeuille.

On a ainsi l'équation suivante :

$$\Delta P = \delta R + (\theta \Delta t) \quad (21)$$

avec $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ les rendements des facteurs de risque X_i tels que $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$\delta = (\delta_1 \dots \delta_n)$ des réels tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_i = \frac{\partial P}{\partial X_i}$, et $\theta \Delta t$ un réel représentant l'effet du temps.

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un portefeuille contenant un unique dérivé. On a alors :

$$P = wd \quad (22)$$

avec d le dérivé et w son poids

$$\Delta P = wR_d \quad (23)$$

avec R_d le rendement du dérivé

Or le rendement du dérivé est considéré comme linéaire par rapport à son sous-jacent. Il nous faut donc trouver un coefficient permettant de faire le lien entre une variation du sous-jacent et une variation du dérivé lui-même. En pratique, on utilisera simplement le Delta du dérivé comme coefficient permettant de quantifier l'impact d'une variation du sous-jacent sur le dérivé. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on parle de méthode Delta-Normale. Pour rappel, on le définit mathématiquement ainsi :

$$\Delta_u^d = \frac{\partial d}{\partial u} \quad (24)$$

avec ∂d la variation du dérivé et ∂u celle du sous-jacent.

On a alors :

$$\Delta P = wR_d = w\Delta_u^d R_u \quad (25)$$

avec R_u le rendement du sous-jacent u du dérivé d

Finalement la VaR du portefeuille est donnée par :

$$-VaR_{T,\alpha} = w\Delta_u^d \left(\sigma_R \times N^{-1}(1-\alpha) \times \sqrt{T} (+\mu_R) \right) \quad (26)$$

Si le portefeuille contient plusieurs dérivés alors :

$$P = \sum_{i=1}^n w_i d_i \quad (27)$$

Ce qui donne :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n w_i R_{d_i} = \sum_{i=1}^n w_i \Delta_{u_i}^{d_i} R_{u_i} \quad (28)$$

avec $\Delta_{u_i}^{d_i}$ le delta du dérivé d_i et R_{u_i} les rendements du sous-jacent u_i du dérivé d_i

Nous pouvons alors calculer les moments des rendements du portefeuille :

$$\mu_{\Delta P} = \sum_{i=1}^n w_i \Delta_{u_i}^{d_i} \mu_i \quad (29)$$

$$\sigma_{\Delta P}^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \Delta_{u_i}^{d_i^2} \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_i w_j \Delta_{u_i}^{d_i} \Delta_{u_j}^{d_j} \text{cov}(R_{u_i}, R_{u_j})$$

avec μ_i la moyenne des rendements de u_i , σ_i^2 la variance de des rendements de u_i ,

$\text{cov}(R_{u_i}, R_{u_j})$ la covariance des rendements de u_i et u_j

Finalement les rendements du dérivé étant une combinaison linéaire de gaussiennes (les rendements des u_i), ils sont, eux aussi, gaussiens par stabilité de la loi normale par combinaison linéaire. On a finalement :

$$-VaR_{T,\alpha} = \sigma_{\Delta P} \times N^{-1}(1-\alpha) \times \sqrt{T} (+\mu_{\Delta P}) \quad (30)$$

En définitive, cette méthodologie est très performante car elle ne nécessite que très peu de paramètres : la volatilité, la matrice de variance-covariance et les deltas des produits considérés. Son calcul peut s'effectuer directement sans recours à une quelconque simulation. Toutefois, elle repose sur une hypothèse forte, les variations d'un produit dérivé sont linéaires par rapport à celles de son sous-jacent. Or, pour de nombreux produits, ce n'est absolument pas le cas.

1.2.1.2. Value-at-Risk Gamma-Normale

Contrairement à l'hypothèse précédente, où le rendement d'un dérivé est linéaire par rapport à celui de son sous-jacent, le modèle de VaR Gamma-Normale introduit un terme quadratique qui permet de prendre en compte la convexité de la relation entre le dérivé et le sous-jacent. La relation liant les variations du portefeuille aux facteurs de risque n'est désormais plus linéaire mais quadratique. On a donc l'équation suivante :

$$\Delta P = \delta R + \frac{1}{2} R^T \Gamma R + (\theta \Delta t) \quad (31)$$

$$\text{avec } R^T \text{ la transposée de } R \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2: \Gamma_{i,j} = \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j}$$

Dans le cas d'un portefeuille de dérivés, on remarquera que la diagonale de la matrice Γ correspond au Gamma de chacun des dérivés. Le Gamma d'un dérivé est une mesure de la convexité du prix du dérivé par rapport à celui du sous-jacent. En d'autres termes, il mesure les variations du Delta en fonction de celles du sous-jacent.

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial u} = \frac{\partial(\partial d)}{\partial u} = \frac{\partial^2 d}{\partial u^2} \quad (32)$$

avec d le dérivé, u le sous-jacent et Δ le delta du dérivé

En définitive, cette équation revient à utiliser celle donnée dans la section précédente, en y ajoutant un terme prenant en compte la convexité du prix d'un dérivé par rapport à celui de son sous-jacent. C'est une amélioration de la méthode précédente qui vise à obtenir plus de précision. Grâce à l'équation précédente, on peut désormais calculer les moments de la variation du portefeuille⁵ :

$$\mu_{\Delta P} = \frac{1}{2} \times \text{trace}(\Gamma \Sigma) + (\theta \Delta t) \quad (33)$$

$$\sigma_{\Delta P}^2 = \frac{1}{2} \times \text{trace}((\Gamma \Sigma)^2) + \delta^T \Sigma \delta$$

avec Σ la matrice de variance – covariance des rendements des facteurs de risque

La VaR du portefeuille est finalement donnée par :

$$-VaR_{T,\alpha} = \sigma_{\Delta P} \times N^{-1}(1 - \alpha) \times \sqrt{T} (+\mu_{\Delta P}) \quad (34)$$

Remarque :

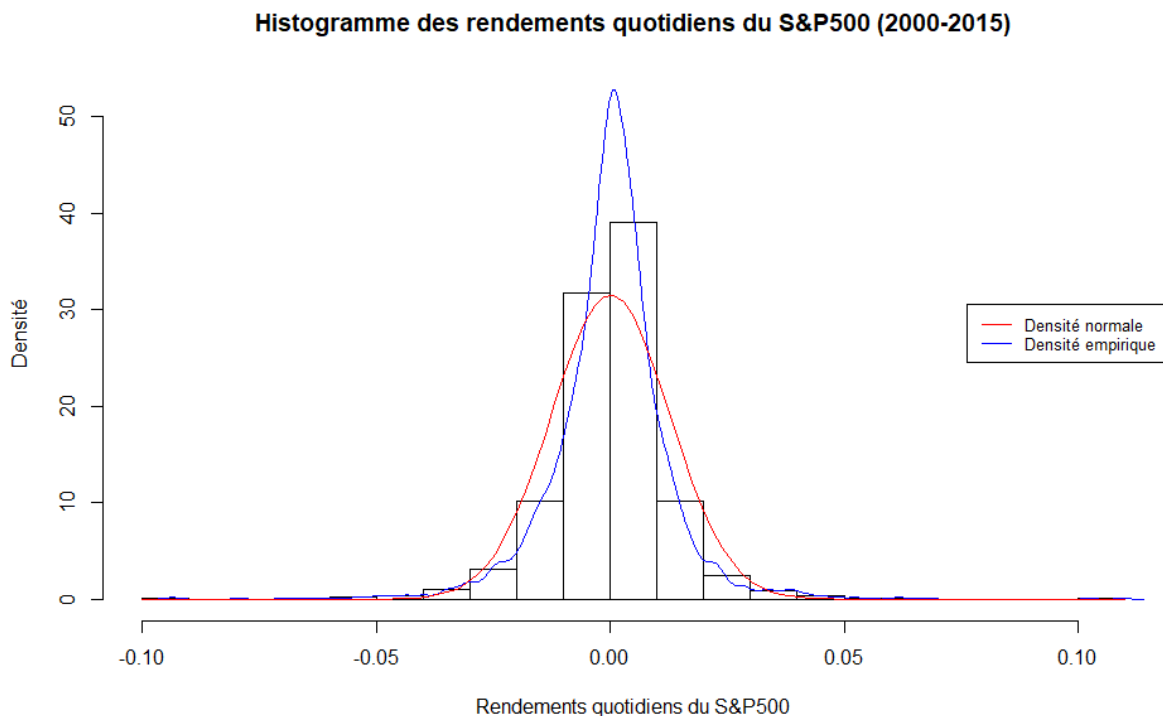
On notera que cette méthode est fautive mathématiquement car elle suppose la normalité des rendements du portefeuille. Or dans le cas d'un unique facteur de risque dans le portefeuille, on a : $\Delta P = \delta R + \frac{\Gamma}{2} R^2$. Or, si les rendements sont normaux, les rendements au carré ne le sont pas. Ils suivent une loi du χ^2 , ce qui rend l'hypothèse fallacieuse : une combinaison linéaire de gaussienne et de loi du χ^2 n'est pas gaussienne.

⁵ CASTELLACCI, Giuseppe et SICLARI, Michael J. The practice of Delta–Gamma VaR: Implementing the quadratic portfolio model. European Journal of Operational Research, 2003, vol. 150, no 3, p. 529-545.

1.2.1.3. Distributions non normales

Nous avons vu comment calculer la *Value-at-Risk* sous l'hypothèse de normalité des rendements des facteurs de risque. Cependant, cette hypothèse est rarement vérifiée car les queues des distributions de rendements financiers sont plus épaisses que celles d'une gaussienne (les rendements extrêmes sont plus souvent observés sur les marchés que selon la loi normale) et les rendements sont plus concentrés autour de la moyenne (distribution leptokurtique : kurtosis supérieur à celui d'une loi normale). Le kurtosis étant le moment d'ordre quatre de la distribution centrée réduite associée à une distribution. Ci-dessous, l'exemple avec la distribution des rendements du S&P500 sur 10 ans comparée à celle d'une gaussienne.

Figure 4 : Comparaison des rendements du S&P500 et d'une gaussienne



Il peut aussi arriver que la distribution réelle ait un skew positif ou négatif ce qui entraîne des imprécisions lorsque l'on utilise une loi normale pour modéliser. Le skew est le moment d'ordre trois de la distribution centrée réduite associée à une distribution. S'il est positif (réciproquement négatif) la distribution est décalée horizontalement vers la droite (réciproquement gauche) par rapport à la loi normale.

La loi normale paraît, de fait, imprécise pour modéliser les rendements des actifs financiers mais d'autres lois peuvent être utilisées.

1.2.1.3.1. Loi de Student-t

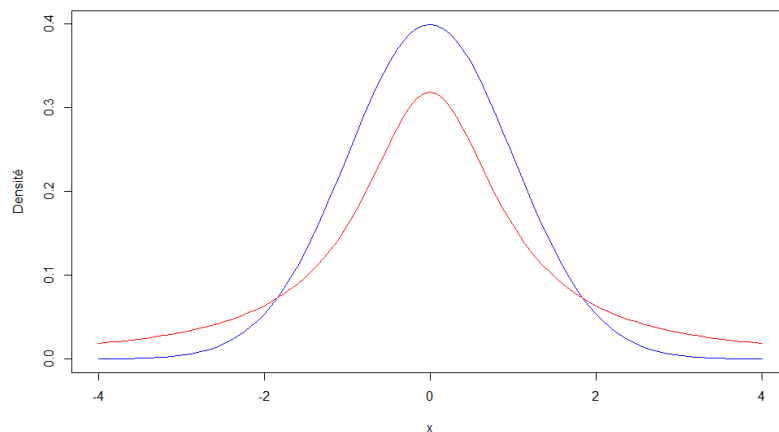
Étant donné les défauts évoqués précédemment, la loi Student-t paraît être une meilleure solution, car elle possède des queues de distribution plus épaisses que la loi normale. Mathématiquement la loi de Student-t a un seul paramètre, noté k , correspondant à son degré de liberté. Elle s'écrit comme le quotient de deux variables aléatoires indépendantes :

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}} \quad (35)$$

avec Z suivant une loi normale centrée réduite et U une loi du χ^2 à k degrés de liberté ($k \in \mathbb{R}$)

On présente ci-dessous la comparaison des deux distributions qui montre clairement que la distribution Student-1 possède des queues plus épaisses que la distribution normale centrée réduite, ce qui correspond à nos attentes vis-à-vis des rendements des actifs financiers. Cependant l'utilisation de cette distribution nécessite de choisir le degré de liberté le mieux adapté aux données réelles.

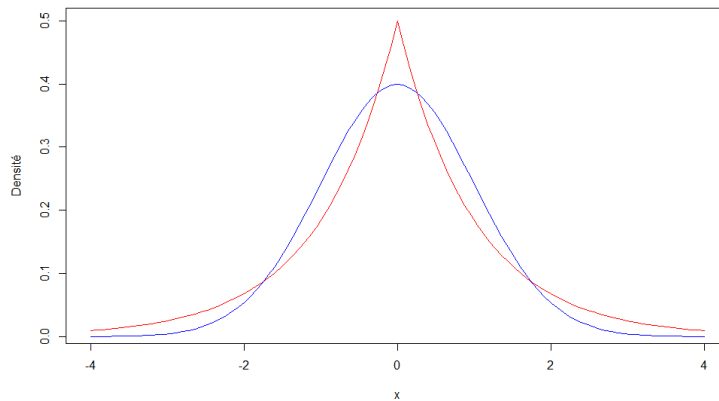
Figure 5 : Comparaison des densités Student-1 en rouge et Normale(0,1) en bleu



1.2.1.3.2. Loi de Laplace

La loi de Laplace, à ne pas confondre avec celle Laplace-Gauss (loi normale), semble aussi être une excellente alternative à la loi normale car ses queues de distribution sont aussi plus épaisses que celles de la loi normale. Cette loi est aussi appelée double exponentielle car sa distribution revient à accoler deux distributions exponentielles dos à dos.

Figure 6 : Comparaison des densités Laplace(0,1) en rouge et Normale(0,1) en bleu



Comme présenté ci-dessus, le kurtosis d'une loi de Laplace est supérieur à celui d'une loi Normale et ses queues de distribution sont plus épaisses, ce qui correspond à nos attentes. Cependant, afin d'obtenir une distribution convenant aux données réelles, il est nécessaire de déterminer les paramètres : μ pour la moyenne de la distribution et b pour l'échelle de la distribution. Le principal enjeu est donc de déterminer b pour que le kurtosis de la distribution corresponde à celui de l'échantillon de données étudiées, μ étant simplement la moyenne calculée classiquement.

1.2.1.4. Développement de Cornish-Fisher

Nous avons vu précédemment comment choisir la distribution la plus adaptée aux rendements des actifs étudiés, ou des portefeuilles, en cherchant, parmi les lois existantes, la plus précise face aux données étudiées. Toutefois, il n'est pas forcément nécessaire d'associer une distribution précise aux données. En effet, le développement de Cornish-Fisher⁶ permet de modifier les quantiles d'une loi normale centrée réduite afin d'obtenir ceux d'une autre loi avec kurtosis et skew donnés. Celui-ci exprime les quantiles d'une distribution centrée réduite quelconque en fonction de ceux d'une loi normale centrée réduite. Cela donne l'équation suivante⁷ :

⁶ CORNISH, Edmund A. et FISHER, Ronald A. Moments and cumulants in the specification of distributions. Revue de l'Institut international de Statistique, 1938, p. 307-320.

⁷ FAVRE, Laurent et GALEANO, Jose-Antonio. Mean-modified value-at-risk optimization with hedge funds. The journal of alternative investments, 2002, vol. 5, no 2, p. 21-25.

$$G^{-1}(\alpha) = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha - 1)k_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^2 - 3z_\alpha)k_4 + \dots \quad (36)$$

avec G la fonction de répartition de la distribution centrée réduite quelconque, z_α le quantile c d'une loi normale centrée réduite égal à $N^{-1}(\alpha)$ et k_i le moment d'ordre i de la variable considérée

Pour l'appliquer, on considère l'échantillon de données historiques (noté R pour les rendements), on définit Y la variable aléatoire, qui est la centrée réduite de la variable aléatoire d'origine (R). On calcule le kurtosis et le skew de la variable Y . Ensuite, on applique la formule afin d'obtenir le quantile recherché. Une fois le quantile estimé, ce qui revient à estimer la *Value-at-Risk* de la variable Y centrée réduite, il est finalement possible d'obtenir le quantile de la variable d'origine en utilisant la relation suivante :

$$-VaR_\alpha(R) = G^{-1}(1 - \alpha) \times \sigma_R + \mu_R \quad (37)$$

Cette méthode est très rapide car il suffit de calculer les moments de la variable observée ce qui fournit ensuite immédiatement le quantile correspondant à la VaR. Elle permet de prendre en compte les moments d'ordre supérieur à deux et principalement le skew et le kurtosis pour mieux estimer la VaR face aux modèles supposant la normalité. Ce développement constitue finalement une correction d'une loi normale afin qu'elle corresponde mieux aux données.

1.2.1.5. Modèles ARMA-GARCH

Nous introduisons dans cette section une nouvelle classe de modèles très utilisée et adaptée aux rendements financiers qui sont stationnaires (au sens faible) en général : les modèles ARMA⁸.

En analyse statistique des séries temporelles, les modèles de moyenne mobile autorégressive (ARMA) fournissent une description des processus stochastiques (faiblement) stationnaires sous forme de deux polynômes, le premier pour l'autorégression (AR) et le second pour la moyenne mobile (MA). L'idée consiste à supposer que le processus stochastique, à un temps t , dépend de ses valeurs aux temps précédents (c'est la composante autorégressive) et qu'à chaque pas de temps une erreur, ou bruit blanc, s'ajoute aux erreurs précédentes (c'est la composante moyenne mobile). En résumé, un tel processus se note comme suit :

$$r_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} + (c) \quad (38)$$

avec les φ_i des coefficients de régression par rapport aux valeurs précédentes,

θ_i des coefficients de prise en compte des erreurs précédentes et

ϵ_i les erreurs précédentes qui sont des bruits blancs i. i. d.

⁸ CALDER, Matthew et DAVIS, Richard A. Introduction to whittle (1953) the analysis of multiple stationary time series. Breakthroughs in statistics. Springer, New York, NY, 1997. p. 141-169.

En fonction de la profondeur de prise en compte temporelle des deux parties, on le notera ARMA(p,q) à l'instar de ce qui est fait pour les modèles GARCH étudiés précédemment. Le paramètre p est celui d'autorégression et il gouverne la mesure dans laquelle les rendements précédents influent sur ceux à venir. Le paramètre q est celui de la persistance des erreurs, c'est-à-dire la mesure dans laquelle les erreurs passées persistent dans le processus. Ces modèles ont été popularisés par un livre de 1970 de George E. P. Box et Jenkins, qui a exposé une méthode itérative (Box-Jenkins) pour les choisir et les estimer⁹.

Les modèles ARMA-GARCH sont des modèles qui combinent les approches ARMA et GARCH, c'est-à-dire que les rendements suivent un processus ARMA, tandis que l'on suppose que la variance suit un processus GARCH. Mathématiquement cela se définit comme suit :

$$\begin{aligned}
 r_t &= \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t \\
 \epsilon_t &= \sigma_t Z_t \\
 \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^{p'} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q'} \beta_j \sigma_{t-j}^2
 \end{aligned} \tag{39}$$

Pour le cas ARMA-eGARCH, la dernière ligne est simplement la log-variance conditionnelle eGARCH.

Nous allons détailler ici ces formules quelque peu arides. Les points suivants sont à retenir :

- Les rendements dépendent des rendements précédents (AR),
- Les erreurs s'accumulent (MA),
- Les erreurs suivent une loi de probabilité à déterminer dont l'échelle est donnée par la volatilité du processus,
- La volatilité n'est pas constante (hétéroscédastique),
- La volatilité de demain est une fonction d'aujourd'hui (autorégressif et conditionnel).

Ici nous avons détaillé le cas de processus ARMA(p,q)-GARCH(p',q') mais, en pratique, les modèles plébiscités en finance sont les modèles ARMA(0,0), car généralement, les rendements sont faiblement corrélés (non autorégressifs), et les erreurs ne semblent pas s'accumuler. C'est-à-dire que les rendements restent autour de la moyenne (avec seulement l'ajout d'un bruit blanc). En ce qui concerne le modèle de volatilité, on observe souvent que les paramètres (1,1) sont optimaux¹⁰. Dans ces conditions, on en revient au modèle ARMA (0,0) - GARCH (1,1) :

$$\begin{aligned}
 r_t &= \mu + \epsilon_t \approx \epsilon_t \\
 \epsilon_t &= \sigma_t Z_t \\
 \sigma_t^2 &= \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2
 \end{aligned} \tag{40}$$

Le défi, en pratique, est de déterminer la loi des erreurs (Z_t) : normale, student, laplace ...

⁹ BOX, G. et JENKINGS, G. Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco, USA. 1970.

¹⁰ Peter R. Hansen and Asger Lunde, "A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?", Journal of Applied Econometrics, Vol. 20, No. 7, 2005, pp. 873-889.

Cette approche, bien que considérée comme paramétrique, ne fait pas d'hypothèse probabiliste sur les rendements eux-mêmes. Elle ne fournit pas de VaR directement obtenue à partir d'un quantile de distribution connue. Il faudra donc réaliser des simulations de réalisations de ce processus (méthode Monte-Carlo cf. 1.2.3) afin d'obtenir des résultats de VaR. C'est donc une approche semi-paramétrique et par simulations de Monte-Carlo.

1.2.1.6. Théorie des valeurs extrêmes (TVE)

Par définition les méthodes présentées précédemment, à l'exception du développement de Cornish-Fisher et du modèle ARMA-GARCH, associent une distribution spécifique aux rendements du portefeuille. Nous avons vu, par ailleurs, que le choix de la distribution peut s'avérer complexe, étant donné que les queues de distribution doivent respecter la distribution réelle des données (valeurs extrêmes observées plus fréquemment qu'une loi normale). Ceci nous amène à l'observation suivante : étant donné que nous cherchons à calculer un quantile correspondant à des pertes extrêmes (95% ou 99%), pourquoi modéliser l'intégralité des rendements et pas seulement les rendements extrêmes ?

C'est ici qu'intervient la théorie des valeurs extrêmes, qui a justement pour but de modéliser les risques extrêmes, à l'image des catastrophes naturelles.

1.2.1.6.1. Cadre d'analyse

Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), représentant les pertes (notées positivement) et de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (41)$$

Les valeurs extrêmes des pertes peuvent alors être étudiées en définissant la variable aléatoire :

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad (42)$$

Ainsi, M_n représente la plus grande perte sur les n pertes observées. Sachant que les variables aléatoires sont i.i.d, on a donc :

$$P(M_n \leq x) = P([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]) = F(x)^n \quad (43)$$

Or, on ne connaît pas la fonction de répartition de F , sinon nous pourrions en déduire la VaR. C'est pourquoi nous allons étudier le comportement asymptotique de M_n .

1.2.1.6.2. Théorème limite de Fisher-Tippett et distribution GEV

Nous introduisons avant de poursuivre la définition suivante :

Les distributions F et F^* sont de même type si :

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, F^*(ax + b) = F(x) \quad (44)$$

Le théorème de Fisher-Tippett permet alors de caractériser la loi des extrêmes :

S'il existe des constantes $a_n > 0$ et b_n telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right\}\right) = G(x) \quad (45)$$

avec G une fonction de distribution non dégénérée, alors G est d'un des trois types suivants

Type I : Gumbel

$$G(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}$$

Type II : Frechet

$$G(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0$$

$$G(x) = \exp(-x^{-\alpha}) \quad \text{si } x > 0 \text{ et } \alpha > 0 \quad (46)$$

Type III : Weibull

$$G(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha}) \quad \text{si } x \leq 0 \text{ et } \alpha > 0$$

$$G(x) = 1 \quad \text{si } x > 0$$

En pratique, ce théorème permet de dire que, pour n assez grand :

$$P\{M_n \leq x\} \approx G\left(\frac{x - b}{a}\right) = G^*(x) \quad \text{avec } a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R} \quad (47)$$

Ce qui donne, après simplification, la fonction suivante appelée « *Generalized Extreme Value distribution* » (GEV) :

$$G(x) = \exp\left(-\left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right) \quad (48)$$

avec les correspondances suivantes :

Frechet : $\xi > 0$

Weibull : $\xi < 0$

Gumbel : $\xi \rightarrow 0$

Remarque : σ et μ sont les limites de a_n et b_n .

Ce modèle est destiné à estimer les quantiles extrêmes, ce qui revient à estimer x_p dans l'équation suivante :

$$G(x_p) = 1 - p \quad (49)$$

avec p réel entre 0 et 1

Sur la période des n observations, la perte sera plus petite que x_p avec une probabilité de $1 - p$. Pour obtenir le quantile correspondant, il ne reste qu'à inverser la fonction G . On obtient donc :

$$x_p = \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - (-\ln(1 - p))^{-\xi}] \quad (50)$$

Les paramètres influant sur le quantile sont donc μ , σ et ξ . Le paramètre μ est appelé paramètre de localisation car, en le modifiant, on effectue une translation sur les fonctions de densité. σ correspond à l'écart-type, on l'appellera donc paramètre de dispersion ou d'échelle. Le dernier paramètre ξ est un paramètre de forme appelé indice des valeurs extrêmes.

1.2.1.6.3. Estimation des paramètres de la distribution GEV

Le défi est d'estimer les trois paramètres en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance.

Soit θ le vecteur de paramètres, nous avons $\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \\ \xi \end{bmatrix}$.

En prenant un échantillon de données $\{X_t\}_{t \in \llbracket 1, T \rrbracket}$ de dimension $T = kn$ avec $k \in \mathbb{N}$, on divise l'échantillon en n blocs et on définit χ_q^+ :

$$\chi_q^+ = \max(\{X_{(q-1)k+t} \mid t = 1, \dots, k\}) \text{ avec } q \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (51)$$

Ainsi, la vraisemblance de l'observation est :

$$L(\chi_q^+; \theta) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_q^+ - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1+\xi}{\xi}} \times \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_q^+ - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (52)$$

Cette méthode est valable pour $\xi > -0,5$. Or, en finance, on a généralement $\xi > 0$. De ceci, on déduit l'expression de la log-vraisemblance :

$$l(\chi_q^+; \theta) = -\ln \sigma - \left(\frac{1+\xi}{\xi} \right) \times \ln \left(1 + \xi \left(\frac{\chi_q^+ - \mu}{\sigma} \right) \right) - \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_q^+ - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad (53)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance (« maximum likelihood estimator » : MLE) est finalement :

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{q=1}^n l(\chi_q^+; \theta) \quad (54)$$

avec Θ l'espace des paramètres

En conclusion, par cette méthode on ne calcule pas le quantile, mais on estime la distribution à partir des maxima. Une telle méthodologie fonctionne mais nécessite d'énormes quantités de données. Avec 250 jours de données, et en créant des blocs de 25 jours, on obtient une estimation de 10 extrema. Ce qui n'est pas très représentatif statistiquement. Nous verrons par la suite qu'une autre méthode peut être employée afin de réduire la quantité de données nécessaire tout en restant dans le cadre de la théorie des valeurs extrêmes, la méthode du seuil, ou en anglais, « *peaks-over-threshold model* ».

1.2.1.6.4. Distribution de Pareto Généralisée (DPG)

Introduisons la distribution de Pareto généralisée, qui sera fondamentale dans le reste de cette section à propos de la méthode « *peaks-over-threshold* ». C'est une distribution à deux paramètres :

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \text{ si } \xi \neq 0$$

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \text{ si } \xi = 0 \quad (55)$$

avec $\beta > 0, x \geq 0$ quand $\xi \geq 0$ et $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi}$ quand $\xi < 0$

ξ étant le paramètre qui correspond au caractère leptokurtique de la distribution et β un paramètre d'échelle. En finance, pour les queues épaisses, on a $\xi > 0$.

Nous présentons aussi la fonction de distribution des excès, qui est la probabilité qu'une perte ne dépasse pas la valeur u d'au plus y , sachant qu'elle dépasse u . Le seuil u doit être élevé et on a donc :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u) \quad (56)$$

pour $0 \leq y \leq x_0 - u$

avec $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$ mais généralement $x_0 = +\infty$

On peut écrire cette même fonction sous la forme :

$$F_u(y) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (57)$$

La propriété intéressante, qui relie les deux notions précédentes, est celle qui dit que pour l'ensemble des fonctions de distribution F que nous utiliserons dans cette étude, quand le seuil u augmente, la fonction de distribution des excès converge vers une DPG. Ainsi, à un seuil u suffisant, on pourra substituer à une fonction de répartition des excès, une DPG¹¹ :

$$F_u(y) = G_{\xi,\beta}(y) \quad (58)$$

Ceci permet d'entrevoir enfin l'intérêt de cette méthode. En estimant les paramètres ξ et β de la DPG, associée à la fonction de répartition des excès à un seuil u suffisant, nous pourrions travailler

¹¹ D'après le théorème de Pickands.

avec un échantillon présentant plus de valeurs (les pertes au-delà de u) que lorsque nous travaillions avec les maxima. Nous verrons donc dans la section suivante comment estimer ces paramètres (u, ξ, β) .

1.2.1.6.5. Estimation des paramètres de la DPG

Afin d'évaluer le paramètre u , la méthode classique est une méthode graphique. Pour l'expliquer, nous aurons besoin de la fonction d'excès en moyenne ci-dessous :

$$e(u) = E(X - u | X > u) \text{ pour } u \geq 0 \quad (59)$$

L'estimateur empirique de cette fonction étant :

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}} \quad (60)$$

On a, par ailleurs, la double égalité suivante :

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} \quad (61)$$

Le choix de la valeur de u se fait graphiquement en traçant $e_n(u)$ en fonction des valeurs de u et en prenant la valeur à partir de laquelle la courbe devient presque linéaire (ce à quoi on s'attend d'après la formule précédente). Dans un second temps, on compte le nombre de pertes au-delà du seuil retenu que l'on note N_u sur un échantillon de taille n . A l'aide de la méthode de maximum de vraisemblance on détermine ensuite des estimateurs de ξ et β notés $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$.

Finalement, on dispose d'une estimation de la fonction de répartition des excès au seuil u avec la fonction suivante :

$$\hat{F}_u(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}(x - u)}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \quad (62)$$

Nous obtenons de cette façon un estimateur historique des excès qui a été complété par la théorie des valeurs extrêmes. Celui-ci est plus performant que celui présenté dans la méthode des maxima par blocs car le seuil u permet d'intégrer plus de données à notre calcul, ce qui en augmente la précision, avec la même quantité de données.

1.2.1.6.6. Calcul de la VaR-TVE

Une fois la distribution des excès approchée, il ne reste qu'à l'inverser pour obtenir le quantile de VaR recherché, qui correspond donc à :

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n(1-\alpha)}{N_u} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (63)$$

1.2.2. *Value-at-Risk* par simulation historique

1.2.2.1. Simulation historique

Les méthodes de calcul de la *Value-at-Risk* exposées précédemment s'appuient sur des techniques probabilistes, paramétriques ou semi-paramétriques. En effet, soit on associe une distribution aux rendements du sous-jacent, soit on ajuste les quantiles d'une loi normale (Cornish-Fisher), soit on attribue une loi aux innovations (ARMA-GARCH), soit on affecte une loi aux maxima ou aux pertes au-delà d'un seuil. Que la distribution soit connue (Normale, Laplace, Student-t ou Pareto) ou non, les précédentes méthodes cherchent à choisir une distribution dont on déduit, directement ou indirectement, la VaR.

Dans ce contexte, d'autres méthodes ont été développées : les méthodes de simulation. Leur objectif est de produire des scénarii futurs à partir des données récoltées sans formuler d'hypothèse probabiliste. Une fois les scénarii obtenus, ils sont triés du pire au meilleur. Ensuite, en fonction du niveau de confiance de la VaR, on extrait le scénario représentant le quantile désiré et obtient ainsi la VaR recherchée. Si le quantile n'est pas disponible, il est possible d'interpoler le résultat grâce aux deux scénarii encadrant le quantile voulu. Cette approche, contrairement aux précédentes, repose sur les statistiques : on produit des simulations et une nouvelle distribution, de laquelle on extrait le quantile correspondant à la VaR.

La *Value-at-Risk* par simulation historique¹² est l'une de ces méthodes. Elle consiste simplement à utiliser les résultats historiques (par exemple, les rendements précédemment observés) et à les appliquer à la dernière observation du facteur de risque (par exemple le dernier cours observé d'une action) afin d'obtenir une hypothèse d'évolution du facteur de risque. En répétant ce schéma avec un historique suffisamment fourni, nous générons un grand nombre de scénarii hypothétiques dont le quantile fait office de VaR. En fonction de l'horizon temporel désiré, il peut être nécessaire de répéter l'opération, pour chaque scénario, plusieurs fois, afin d'obtenir des scénarii à l'horizon voulu. On forme ainsi une distribution hypothétique de rendements futurs.

L'idée sous-jacente reste, dans tous les cas, de simuler les évolutions futures des facteurs de risque à l'horizon temporel désiré, en s'appuyant sur des données historiques afin d'obtenir des scénarii desquels on déduit la VaR. Les avantages de cette méthode sont nombreux, en effet elle :

- est peu coûteuse en calculs ;
- ne nécessite pas de formuler des hypothèses sur la distribution des rendements ; et
- est fondée sur des mouvements de marché réels, ce qui permet d'effectuer des stress-tests.

¹² HULL, John, GODLEWSKI, Christophe, et MERLI, Maxime. Gestion des risques et institutions financières. Pearson Education France, 2010.

Pour mieux comprendre cette méthode, prenons un échantillon de rendements quotidiens historiques d'une action noté R . Avec $R = (r_1, \dots, r_n)$ où r_i est le log-rendement au jour i .

Avec une action d'une valeur S_t au jour t , on simule l'évolution du prix à un jour en utilisant l'un des r_i et en réalisant le calcul suivant :

$$S_{t+1} = S_t \times e^{r_i} \quad (64)$$

Toutefois, les projections se fondant sur des données historiques, il est nécessaire de sélectionner les données à utiliser (les r_i). On comprend intuitivement que les rendements d'une action donnée datant d'il y a 10 ans sont bien moins pertinents que ceux de la veille si l'on cherche à simuler les évolutions futures de cette action. On retrouve ici la problématique rencontrée dans le calcul de la volatilité et la nécessité d'introduire des pondérations dans le choix des observations passées.

Trois questions fondamentales se posent alors :

- Quelles données utiliser ? (Cohérence des données)
- Combien de données sont nécessaires ? (Taille de l'échantillon)
- Combien de scénarii futurs faut-il simuler ? (Nombre de simulations)

En général, les institutions financières comme les banques calculent une VaR roulante sur une fenêtre de 252 jours (1 an). Elles utilisent donc chaque jour les 252 rendements précédents afin de simuler une distribution de 252 simulations. Cette réponse, bien que simpliste, s'est imposée du fait de sa facilité de mise en œuvre et de sa praticité. Néanmoins d'autres méthodes existent.

1.2.2.2. Simulation historique avec *Bootstrapping*

Pour aller plus loin et introduire une composante aléatoire dans le calcul de la VaR historique, il est possible de sélectionner les scénarii passés de manière aléatoire en « piochant au hasard parmi ceux-ci »¹³. Nous illustrerons cette méthode par un exemple.

En nous plaçant à la date t , prenons un échantillon de 1000 log-rendements que l'on notera ainsi :

$$N = (r_{t-1} \quad \dots \quad r_{t-1000}),$$

avec r_{t-k} le rendement k jours avant la date t

Considérons que nous souhaitons réaliser 100 simulations historiques. On tirera aléatoirement 100 rendements parmi les 1000 précédents :

$$R = (r_{t-j_1} \quad \dots \quad r_{t-j_{100}})$$

avec $\forall k \in \llbracket 1, 100 \rrbracket, j_k \in \llbracket 1, 1000 \rrbracket$

Puis on réalisera le calcul (comme dans le cas d'une simulation historique classique à partir de cet échantillon de rendements) :

¹³ SIEGL, Thomas et WEST, Ansgar. Statistical bootstrapping methods in VaR calculation. Applied Mathematical Finance, 2001, vol. 8, no 3, p. 167-181.

$$S = \begin{pmatrix} S_t \times e^{r_{t-j_1}} \\ \vdots \\ S_t \times e^{r_{t-j_{100}}} \end{pmatrix} \quad (65)$$

On aura finalement :

$$-VaR_\alpha = q_{1-\alpha} \left(\ln \left(\frac{S}{S_t} \right) \right) \quad (66)$$

avec $q_\beta(\cdot)$ la fonction donnant le quantile β du vecteur et, si f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la convention

$$f(X) = \begin{pmatrix} f(X_1) \\ \vdots \\ f(X_n) \end{pmatrix} \text{ si } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Les approches de VaR historiques (en général), bien qu'extrêmement faciles à mettre en œuvre, revêtent néanmoins plusieurs inconvénients¹⁴ :

- la taille de l'historique doit être suffisamment grande comparativement à l'horizon de VaR ;
- le choix des données peut s'avérer complexe (exclusion de certaines périodes atypiques, pondération, *Bootstrapping* etc.) ; et
- la méthode est peu adaptée aux produits dérivés.

Les simulations que nous venons de présenter permettent d'obtenir des évolutions du prix de l'action sous-jacente au dérivé. Toutefois, elles ne fournissent aucune information sur le dérivé lui-même. C'est pourquoi nous nous intéresserons dans la section suivante, au *repricing* des dérivés, qui fait le lien entre la valeur du sous-jacent et le prix du dérivé.

1.2.2.3. Calcul du prix des *futures* et des *calls* européens

Le modèle Black-Scholes-Merton, parfois simplement appelé modèle Black-Scholes, est un modèle mathématique des marchés financiers de dérivés dont la formule Black-Scholes peut être dérivée. Cette formule permet d'estimer les prix des options d'achat et de vente (*call* et *put*). À l'origine, elle permettait d'établir le prix des options européennes et a été la première formule mathématique largement adoptée pour fixer le prix des options. Avant l'invention de cette formule et de ce modèle, les négociants d'options n'utilisaient pas tous une méthode mathématique cohérente afin d'évaluer les options, et l'analyse empirique a montré que les estimations de prix produites par cette formule sont proches des prix observés.

Dans leur première formulation du modèle, Fischer Black et Myron Scholes¹⁵ - les économistes qui ont initialement formulé le modèle - sont parvenus à une équation aux dérivées partielles connue sous le nom d'équation de Black-Scholes. Plus tard, Robert Merton¹⁶ a publié un développement mathématique de leur modèle, à l'aide du calcul stochastique, consacrant ce qui est désormais connu

¹⁴ PRITSKER, Matthew. The hidden dangers of historical simulation. *Journal of Banking & Finance*, 2006, vol. 30, no 2, p. 561-582.

¹⁵ BLACK, Fischer et SCHOLE, Myron. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 1973, vol. 81, no 3, p. 637-654.

¹⁶ MERTON, Robert C. Theory of finance from the perspective of continuous time. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1975, p. 659-674.

sous le nom de formule de Black-Scholes-Merton. Myron Scholes et Robert Merton se sont d'ailleurs partagé le prix Nobel d'économie en 1997.

En résumé, ce modèle détermine le prix d'une option en utilisant la distribution log-normale des rendements, elle-même fondée sur les théories du mouvement brownien : les prix des actifs présentent un comportement similaire au mouvement organique brownien.

Ci-dessous la formule de Black-Scholes fournissant le prix du *call* européen :

Call européen :

$$Prix_C = C(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (67)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

avec S_0 le prix spot du sous-jacent, T le temps à maturité, r le taux sans risque, K le prix d'exercice, σ la volatilité et N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

En ce qui concerne le prix du *future*, il se calcule grâce à un argument de non-arbitrage qui permet d'obtenir la relation suivante :

Future position longue :

$$Prix_f = S_0 e^{rT} \quad (68)$$

1.2.2.4. Simulation du sous-jacent à un jour et calcul de VaR historique

Au vu des informations précédentes, nous comprenons que la VaR historique pour les dérivés consiste à répéter l'opération de simulation du prix du sous-jacent à $t+1$ grâce à l'historique passé. Ensuite, les formules de prix sont utilisées pour obtenir une distribution des prix du dérivé. Finalement, on calcule les rendements du dérivé par rapport au prix à l'instant t .

Grâce à cette méthodologie on obtient une distribution de rendements du dérivé dont le quantile au niveau recherché fournit la VaR historique.

Pour être plus clair, reprenons l'exemple des rendements historiques du sous-jacent de l'option notés R . On cherche à calculer la VaR d'un *call* européen de maturité $T = 30/365$ dont le prix est donné à l'instant t par :

$$c_t = C(S_t, K, r, T, \sigma) = S_t N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (69)$$

Avec les paramètres de la formule fixés.

Nous avons :

$$R = (r_{t-j_1} \quad \dots \quad r_{t-j_{100}})$$

avec $\forall k \in [1, 100], j_k \in [1, 1000]$

Nous obtenons une distribution hypothétique des prix du sous-jacent à $t + 1$ notée S :

$$S = \begin{pmatrix} S_t \times e^{r_{t-j_1}} \\ \vdots \\ S_t \times e^{r_{t-j_{100}}} \end{pmatrix} \quad (70)$$

Finalement, la VaR du *call* européen se calcule de la façon suivante :

$$-VaR_{c,\alpha} = q_{1-\alpha} \left(\ln \left(\frac{C \left(S, K, r, T - \frac{1}{365}, \sigma \right)}{c_t} \right) \right) \quad (71)$$

Nous observons que cette approche est divisée en deux parties : l'obtention d'une distribution hypothétique et le *repricing* de l'option à partir de cette distribution pour obtenir une distribution de rendements de l'option et donc une VaR.

En ce qui concerne le *future* de maturité $T = 30/365$, à l'instant t nous avons : $f_t = S_t e^{rT}$. La VaR du *future* se calcule donc comme suit :

$$-VaR_{f,\alpha} = q_{1-\alpha} \left(\ln \left(\frac{S e^{r \left(T - \frac{1}{365} \right)}}{f_t} \right) \right) \quad (72)$$

1.2.3. *Value-at-Risk* par simulation Monte-Carlo

Les méthodes de Monte Carlo, ou expériences de Monte Carlo, sont une vaste catégorie d'algorithmes de calcul qui reposent sur un échantillonnage aléatoire répété pour obtenir des résultats numériques. Le concept sous-jacent consiste à utiliser le caractère aléatoire afin de résoudre des problèmes qui pourraient être déterministes en principe.

Les méthodes de Monte Carlo sont principalement utilisées dans trois classes de problèmes : l'optimisation, l'intégration numérique et la génération de tirages à partir d'une distribution de probabilités.

1.2.3.1. Théorie et application au calcul de π

Nous nous intéresserons dans cette étude à l'utilisation des simulations de Monte-Carlo, c'est-à-dire que nous nous placerons dans le dernier cas évoqué ci-dessus : la génération de tirages à partir d'une distribution de probabilités. L'objectif de ces simulations est de générer des tirages aléatoires afin d'approcher des quantités non connues étant difficiles à estimer autrement.

L'une des applications les plus classiques est celle qui permet d'estimer le nombre π à l'aide de tirages d'une distribution uniforme¹⁷. Nous détaillerons ci-dessous cet exemple.

Nous savons que l'aire d'un disque est définie par l'équation suivante :

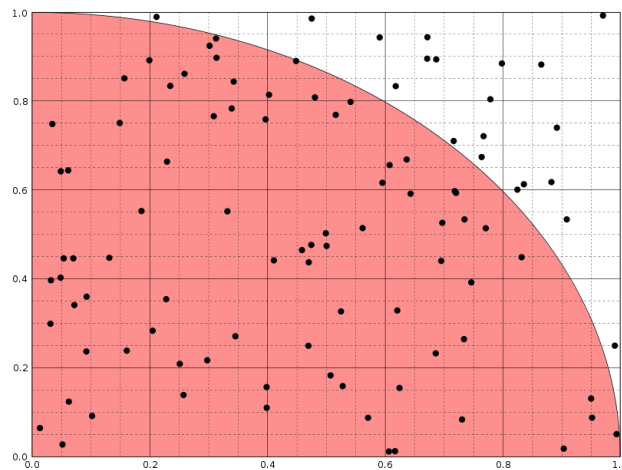
$$C = \pi \times R^2 \text{ avec } R \text{ le rayon du disque}$$

Dans le cas du disque unité (de rayon 1) on obtient donc l'équation suivante :

$$C = \pi$$

La méthode permettant de retrouver la quantité π revient à se placer dans la partie supérieure droite du cercle unité (abscisse et ordonnée entre 0 et 1) et à estimer l'aire de cette partie du cercle. En effet, cette partie du cercle possède une aire valant $\frac{\pi}{4}$. Pour trouver cette valeur, on se place dans le carré encadrant cette partie du cercle et de côté 1, comme présenté sur le schéma ci-dessous.

Figure 7 : Simulation de points dans le carré unité



On génère ensuite aléatoirement un certain nombre de points, chaque point possédant une abscisse et une ordonnée suivant une loi uniforme entre 0 et 1, et on compte ceux qui sont contenus dans le quart de cercle. En pratique, chaque point est défini par deux variables aléatoires notées x et y qui correspondent respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée.

Il faut donc tirer deux valeurs (x et y) entre 0 et 1. On vérifie ensuite si le point constitué de ces coordonnées appartient au quart de cercle en vérifiant que $x^2 + y^2 \leq 1$. Pour chaque point appartenant à celui-ci, on incrémente un compteur. On répète l'opération un grand nombre de fois en fonction de la précision désirée. Finalement, on fait le rapport entre le nombre de points inclus dans le quart de cercle et le nombre de points tirés au total. Cela fournit une estimation de l'aire du quart de cercle, qui vaut $\frac{\pi}{4}$. La multiplication par 4 permet en définitive d'obtenir une valeur approchée de π .

¹⁷ EASTERDAY, Kenneth et SMITH, Tommy. A Monte Carlo application to approximate pi. The Mathematics Teacher, 1991, vol. 84, no 5, p. 387-390.

1.2.3.2. Application à la mesure du risque

Dans le cadre de la mesure des risques de marché, les variables simulées seront les facteurs de risque identifiés. L'idée est d'attribuer aux facteurs de risque des lois de probabilités définies pour générer une distribution hypothétique de leur évolution. Par exemple, on peut considérer que les rendements d'une action suivent une loi normale et, ainsi, simuler des évolutions du prix de l'action en utilisant des tirages gaussiens. En ceci, les simulations de Monte-Carlo reposent sur une approche probabiliste, au même titre que les approches paramétriques présentées précédemment.

Ces simulations apportent toutefois une nouveauté fondamentale dans le cadre de notre analyse : elles ne font pas l'hypothèse d'une relation linéaire ou quadratique entre le dérivé et son facteur de risque. En effet, les simulations de Monte-Carlo sont utilisées dans le cadre du *repricing* complet des dérivés. A l'instar de ce qui a été expliqué pour la VaR historique, la méthode de Monte-Carlo peut, dès lors, être employée pour simuler l'évolution du prix du sous-jacent à un jour. Grâce à cette méthode, il nous est donc possible d'obtenir une distribution de prix du sous-jacent. Pour le reste nous procéderons exactement comme pour la VaR historique, en calculant la distribution des rendements du dérivé et le quantile de VaR.

1.3. Les mesures cohérentes de risque

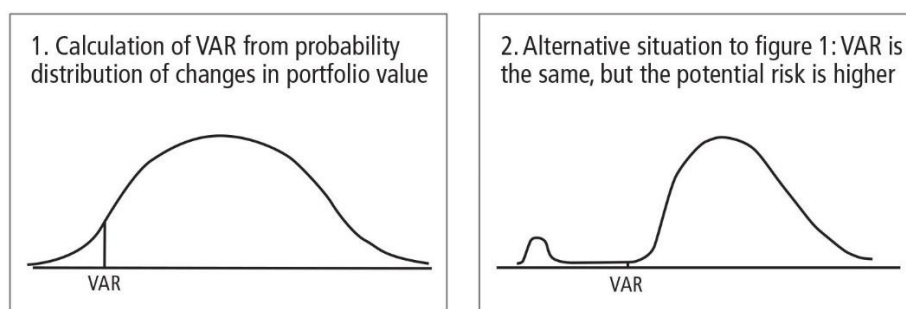
La VaR est définie comme le niveau de perte qui ne sera pas dépassé avec un certain niveau de confiance pendant une certaine période de temps. Par exemple, si la VaR à 99 % sur 10 jours d'une banque est de 3 millions de dollars, on considère qu'il y a seulement un 1 % de chances que les pertes dépassent 3 millions de dollars en 10 jours. Si nous devons utiliser une mesure décrivant le risque dans une situation particulière, la VaR est-elle le meilleur choix ?

Un des problèmes que pose la VaR est que, lorsqu'elle est utilisée pour tenter de limiter les risques pris par un opérateur, elle peut conduire à des résultats indésirables.

Supposons qu'une banque demande à un trader que la VaR à 99 % sur un jour du portefeuille soit maintenue à moins de 10 millions de dollars. Il y a un risque que le trader construise un portefeuille où il y a 99% de chances que la perte journalière soit inférieure à 10 millions de dollars et 1% de chances qu'elle soit de 500 millions de dollars. Le trader satisfait aux limites de risque imposées par la banque, mais il prend clairement des risques inacceptables.

Le problème est résumé dans les figures suivantes. Ces figures montrent la distribution de probabilité pour le gain ou la perte de deux portefeuilles sur une période donnée. Les deux portefeuilles ont la même VaR. Toutefois, le portefeuille de droite est beaucoup plus risqué que celui de gauche, car les pertes potentielles au-delà du niveau de VaR sont beaucoup plus importantes.

Figure 8 : Comparaison de deux distributions de gains/pertes avec la même VaR¹⁸



Par ailleurs, une mesure de risque utilisée pour spécifier les exigences de fonds propres peut être considérée comme le montant de liquidités (ou de capital) qui doit être ajouté à une position pour rendre son risque acceptable pour les régulateurs. Rappelons les propriétés qu'une telle mesure de risque devrait satisfaire :

- **Invariance par translation** : $\rho(X + c \times r) = \rho(X) - c$
- **Homogénéité positive** : $\rho(c \times X) = c \times \rho(X)$ avec c un réel positif
- **Monotonie** : $P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- **Sous-additivité** : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Les trois premières conditions sont vérifiées par la vaste majorité des mesures de risque. Quant à la quatrième, elle stipule que la diversification contribue à réduire les risques. Lorsque nous agrégeons deux risques, la mesure de risque du total doit être inférieure ou égale à la somme des mesures de risque. Une mesure satisfaisant l'ensemble des quatre critères est appelée mesure cohérente. La VAR remplit les trois premières conditions, mais elle ne remplit pas toujours la quatrième, comme nous allons le voir maintenant.

Exemple :

Considérons deux prêts de 10 millions de dollars sur un an, dont chacun a une probabilité de défaillance de 1,25 %. Si un défaut de paiement survient sur l'un des prêts, le recouvrement du principal du prêt est incertain, tous les recouvrements entre 0 et 100 % étant également probables. Si le prêt n'est pas en défaut, un profit de 200 000 dollars est réalisé. Pour simplifier les choses, nous supposons que si un prêt est en défaut, il est certain que l'autre prêt ne sera pas en défaut.

Pour un seul prêt, la VaR à 99 % sur un an est de 2 millions de dollars. En effet, il y a 1,25 % de chances qu'une perte se produise et, sous réserve d'une perte, il y a 80 % de chances que la perte soit supérieure à 2 millions de dollars. La probabilité que la perte soit supérieure à 2 millions de dollars est de 80 % de 1,25 %, soit 1 %.

Considérons ensuite le portefeuille de deux prêts. Chaque prêt est en défaut de paiement 1,25 % du temps et ils ne sont jamais en défaut de paiement en même temps. Il y a donc une probabilité de 2,5 % qu'un défaut de paiement se produise. Dans ce cas, la VaR s'élève à 5,8 millions de dollars. Cela s'explique par le fait qu'il y a 2,5 % de chances qu'un des prêts soit défaillant et, sous réserve de cet événement, il y a 40 % de chances que la perte sur le prêt défaillant soit supérieure à 6 millions de dollars. La probabilité que la perte sur le prêt défaillant soit supérieure à 6 millions de dollars est donc de 40 % de 2,5 %, soit 1 %. De plus un bénéfice de 200 000 dollars est réalisé sur

¹⁸ D'après : <https://www.risk.net/risk-magazine/technical-paper/1506669/var-versus-expected-shortfall>

l'autre prêt, ce qui montre que la VaR est de 5,8 millions de dollars pour le portefeuille des deux prêts.

La VaR des prêts considérés séparément est de 4 millions de dollars (2 millions de dollars + 2 millions de dollars). La VaR du portefeuille contenant les deux prêts est supérieure à la somme des VaR des deux prêts, ce qui montre que la VaR n'est pas sous-additive et donc non cohérente¹⁹.

1.3.1. Tail Conditional Expectation (TCE)

Bien que la VaR soit la principale mesure de risque utilisée en finance, elle ne fournit aucune information sur les pertes lorsque le niveau de confiance est dépassé. Pour la compléter, les institutions ont recours à la *Tail Conditional Expectation* (TCE), qui nous informe sur l'espérance des pertes au-delà du niveau de la VaR. Cette mesure fournit donc la perte moyenne à laquelle s'attendre dans le cas où la VaR a été dépassée, i.e. dans les cas les plus extrêmes.

Ainsi la TCE est toujours plus grande que la VaR. Mathématiquement, elle se définit comme suit²⁰ :

$$TCE_{\alpha}(X) = E(X|X \geq VaR_{\alpha}(X)) \quad (73)$$

avec X les pertes du portefeuille

Lorsque la variable étudiée suit une distribution continue, ce qui sera le cas dans notre étude (loi normale, student etc.), elle est équivalente à la CVaR (*Conditional Value at Risk*) qui est la solution du problème d'optimisation suivant²¹ :

$$CVaR_{\alpha}(X) = \inf \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} E[X - a]^+ : a \in \mathbb{R} \right\} \quad (74)$$

La CVaR possède la propriété intéressante que nous recherchions : la cohérence²². C'est pourquoi elle est souvent utilisée pour compléter la VaR.

En définitive, alors que la VaR donne une indication sur le risque encouru dans les cas habituels, la TCE répond à la question : « Si la situation est extrême, quelle sera la perte attendue ? ». La TCE apporte ainsi une information déterminante dans l'analyse des risques, elle nous renseigne sur la queue de la distribution des pertes.

Exemple :

Reprenons l'exemple de la section précédente : la VaR pour un seul prêt était de 2 millions de dollars. La TCE de chaque prêt, lorsque l'horizon temporel est d'un an et que le niveau de confiance est de 99 %, est donc la perte moyenne attendue sur le prêt, sous réserve d'une perte supérieure à 2 millions de dollars (la VaR). Étant donné que les pertes sont uniformément réparties entre 0 et 10

¹⁹ Exemple d'après : HULL, John. Risk management and financial institutions, Web Site. John Wiley & Sons, 2012.

²⁰ D'après le cours du professeur TAVIN Bertrand, Introduction to Derivatives and Risk Management of Banks suivi à emlyon business school, Session 6.

²¹ PFLUG, Georg Ch. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In : Probabilistic constrained optimization. Springer, Boston, MA, 2000. p. 272-281.

²² Preuve de la cohérence de la CVaR : ACERBI, Carlo et TASCHE, Dirk. On the coherence of expected shortfall. Journal of Banking & Finance, 2002, vol. 26, no 7, p. 1487-1503.

millions de dollars, cela représente la moitié de l'intervalle allant de 2 à 10 millions de dollars, soit une TCE de 6 millions de dollars par prêt.

La VaR pour un portefeuille composé de deux prêts a été calculée à 5,8 millions de dollars. La TCE du portefeuille est donc la perte attendue sur le portefeuille, à condition que la perte soit supérieure à 5,8 millions de dollars. Lorsqu'un prêt est en défaut, l'autre (par hypothèse) ne l'est pas, et les résultats sont uniformément répartis entre un gain de 200 000 dollars et une perte de 9,8 millions de dollars. Étant donné que nous sommes dans la partie de la distribution entre 5,8 millions et 9,8 millions de dollars, la TCE du portefeuille contenant les deux prêts est ainsi de 7,8 millions de dollars.

On vérifie ainsi la sous-additivité de la TCE car, 12 millions de dollars > 7,8 millions de dollars. Au-delà de la TCE, d'autres mesures de risque ont été développées afin de mieux informer sur les risques extrêmes encourus. Parmi celles-ci, les mesures de Wang regroupent un grand nombre d'alternatives que nous verrons dans la section suivante.

1.3.2. Mesures de Wang

Revenons maintenant à la théorie des mesures de risque. D'autres mesures de risque peuvent être construites mathématiquement à l'instar des mesures de risque de Wang. Ce sont des fonctions qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$R_{g,\alpha}(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx = \int_0^1 VaR[X, 1 - \alpha] dg(\alpha) \quad (75)$$

avec $R_{g,\alpha}$ la mesure de risque de Wang, X les pertes du portefeuille, F_X sa fonction de répartition, α le niveau de confiance voulu et g la fonction de distorsion associée.

Une fonction de distorsion est une fonction croissante de la forme suivante :

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ telle que } g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1 \quad (76)$$

Pour g fixée, on a R_g la mesure de Wang associée à la fonction de distorsion g . C'est cette fonction qui permet d'alourdir la distribution des pertes et de construire autant de mesures de risque que voulu, puisqu'à chaque fonction de distorsion correspond une mesure de risque différente. La dernière formulation permet de comprendre que les mesures de Wang sont en réalité des moyennes pondérées de VaR. Mathématiquement, les mesures de risque de Wang sont toujours homogènes positives, invariantes par translation et monotones. Toutefois, le critère de sous-additivité dépend de la concavité de la fonction de distorsion. En effet on a ²³:

$$R_g \text{ sous-additive} \Leftrightarrow g \text{ concave} \quad (77)$$

Étant donné le résultat précédent, on observe qu'il est possible de définir d'autres mesures de risque de Wang cohérentes, à condition qu'elles soient associées à une fonction de distorsion concave.

²³ CHARPENTIER, Arthur. Mesures de risque. Université Rennes, 2010, vol. 1.

Remarques :

- En particulier, en prenant la fonction de distorsion $g_\alpha(x) = \mathbf{1}_{[x \geq 1-\alpha]}$ on observe que :
 $R_{g,\alpha}(X) = VaR_\alpha(X)$
- La TCE n'est pas une mesure de Wang.

1.3.3. Calcul de la TCE

1.3.3.1. Calcul de la TCE des modèles paramétriques

En fonction du modèle choisi, il convient de calculer la TCE en complément de la VaR. Deux cas se distinguent. Dans le premier, nous avons formulé une hypothèse sur la distribution des rendements du facteur de risque (par exemple, les rendements du S&P500) et nous pouvons formuler une expression directe de la TCE. Dans le second, la VaR a été calculée avec des simulations et il faut donc calculer empiriquement la moyenne des simulations excédents la VaR retenue. Dans cette section nous nous intéresserons au premier cas.

1.3.3.1.1. TCE en fonction de la distribution

Ci-dessous, nous énumérerons les formules de calcul direct de la TCE en fonction de la distribution attribuée au facteur de risque X.

Cas 1 : Loi Normale

$$TCE_\alpha(X) = \mu + \sigma \times \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \quad (78)$$

avec $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x^2}{2}}$ la densité d'une gaussienne centrée réduite et $\Phi^{-1}(\alpha)$ le quantile associé

Cas 2 : Loi Student-t

$$TCE_\alpha(X) = \mu + \sigma \times \frac{v + (T^{-1}(\alpha))^2}{v - 1} \times \frac{\tau(T^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \quad (79)$$

avec τ la densité de la loi Student de degrés de liberté v et $T^{-1}(\alpha)$ le quantile associé

1.3.3.1.2. Utilisation du modèle Delta/Gamma-Normal pour les dérivés

Une fois la TCE des facteurs de risque (sous-jacents) calculée, il reste à déterminer celle des dérivés. Pour cela, on utilise les relations décrites précédemment, à l'aide du modèle Delta-Normal ou Gamma-Normal. En effet, ceux-ci permettent de faire le lien entre les facteurs de risque et les dérivés.

Dans le cas du modèle Delta-Normal, on considère que les rendements du dérivé dépendent linéairement de ceux du sous-jacent. C'est-à-dire :

$$D = \delta X (+\theta t) \quad (80)$$

avec D les rendements du dérivé et X ceux du sous-jacent

Ce qui permet de donner directement la TCE du dérivé grâce à l'homogénéité de la TCE :

$$TCE_{\alpha}(D) = \delta \times TCE_{\alpha}(X) \quad (81)$$

avec $TCE_{\alpha}(X)$ la Tail Conditional Expectation des rendements de X

et $TCE_{\alpha}(D)$ celle des rendements du dérivé.

Dans le cas du modèle Gamma-Normal avec un seul sous-jacent, nous rappelons aussi la relation :

$$D = \delta X + \frac{1}{2} \Gamma X^2 \quad (82)$$

Ici, le calcul de la TCE du dérivé n'est pas direct. En effet, la présence du « X^2 » dans l'équation ne permet plus d'utiliser l'argument de stabilité par combinaison linéaire de la loi normale. Dans ces circonstances, « X^2 » correspond à une loi du χ^2 et il faudra donc estimer la valeur de :

$$TCE_{\alpha}(D) = TCE_{\alpha}\left(\delta X + \frac{1}{2} \Gamma X^2\right) \neq \delta \times TCE_{\alpha}(X) + \frac{1}{2} \Gamma \times TCE_{\alpha}(X)^2 \quad (83)$$

On utilisera pour cela des méthodes numériques d'approximation.

1.3.3.1.3. TCE dans le cadre de la Théorie des Valeurs Extrêmes

Reprenons ici le résultat de la section « Calcul de la VaR-TVE » qui fournissait un estimateur de la VaR-TVE :

$$\widehat{VaR}_{\alpha} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n(1-\alpha)}{N_u} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (84)$$

En utilisant la relation entre la VaR et la TCE, on obtient l'estimateur de la TCE suivant :

$$\widehat{TCE}_\alpha = \frac{\widehat{VaR}_\alpha + \hat{\beta} - \hat{\xi}}{1 - \hat{\xi}} \quad (85)$$

1.3.3.2. TCE pour les simulations historiques, Monte-Carlo et ARMA-GARCH

Pour rappel, les méthodes de simulation (historique, Monte-Carlo et ARMA-GARCH) fournissent une distribution hypothétique des gains/pertes du dérivé étudié (rendements). On obtient la VaR en récupérant le quantile de cette distribution correspondant au niveau de confiance désiré.

Par définition de la TCE on a $TCE_\alpha(D) = E(D|D \geq VaR_\alpha(D))$. Ainsi en prenant la moyenne empirique conditionnelle de la distribution des pertes, on obtient que la TCE du dérivé est :

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i 1_{\{X_i \geq VaR_\alpha(D)\}}}{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \geq VaR_\alpha(D)\}}} \quad (86)$$

avec les X_i les valeurs de la distribution de pertes du dérivé

et $1_{\{X_i \geq VaR_\alpha(D)\}}$ la fonction indicatrice de l'évènement en indice.

Ceci n'est rien d'autre que la moyenne empirique conditionnelle des pertes de la distribution qui sont supérieures à la VaR calculée.

2. Quelles mesures pour les produits dérivés ?

2.1. Cas de l'exposition linéaire

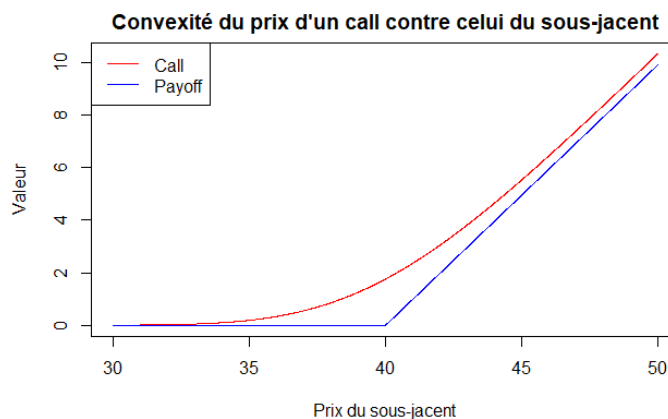
Pour résumer, dans le cas des produits tels que les actions et les *futures*, qui ont un prix qui évolue de manière linéaire par rapport à leur sous-jacent, on parle d'exposition linéaire. Dans ces cas, le calcul de la VaR se fait bien à l'aide du modèle VaR-Normale ou de modèles paramétriques plus précis (Student ou Laplace). En effet, les prix n'ayant pas de convexité par rapport au sous-jacent, les hypothèses de ces modèles sont suffisantes.

Bien que contre-intuitif, dans le cas des *forwards* de taux, on constate l'apparition d'une convexité du prix par rapport à celui du sous-jacent. Elle s'explique par la différence dans la méthode de calcul et par les modalités de paiement des marges entre *futures* et *forwards*. Les flux financiers sur les *forwards* ne sont pas quotidiens, contrairement aux *futures*, ce qui implique un biais de convexité qui rend les méthodes linéaires moins précises. Ainsi, les prix *forwards* ne sont pas toujours égaux aux prix *futures*. C'est pour cela que nous n'avons pas inclus les *forwards* dans les produits avec exposition linéaire.

2.2. Cas de l'exposition non-linéaire

Dans le cas de produits dérivés avec exposition non-linéaire comme les options, des ajustements sont nécessaires. Le modèle de VaR Gamma-Normale prend, par exemple en compte la convexité par l'intermédiaire du gamma (Γ) et tente de corriger ce biais. Toutefois, le prix des options résulte de nombreux facteurs et non pas des seules variations du sous-jacent. C'est pourquoi les simulations de Monte-Carlo sont en pratique utilisées pour ce type de produit. Elles permettent de recalculer un prix théorique en modifiant les paramètres de marché (prix du sous-jacent, taux d'intérêt, volatilité etc.) et de mieux prendre en compte la complexité de tels produits.

Figure 9 : Convexité du prix de l'option en fonction du prix du sous-jacent



3. Validation de modèle et *backtesting*

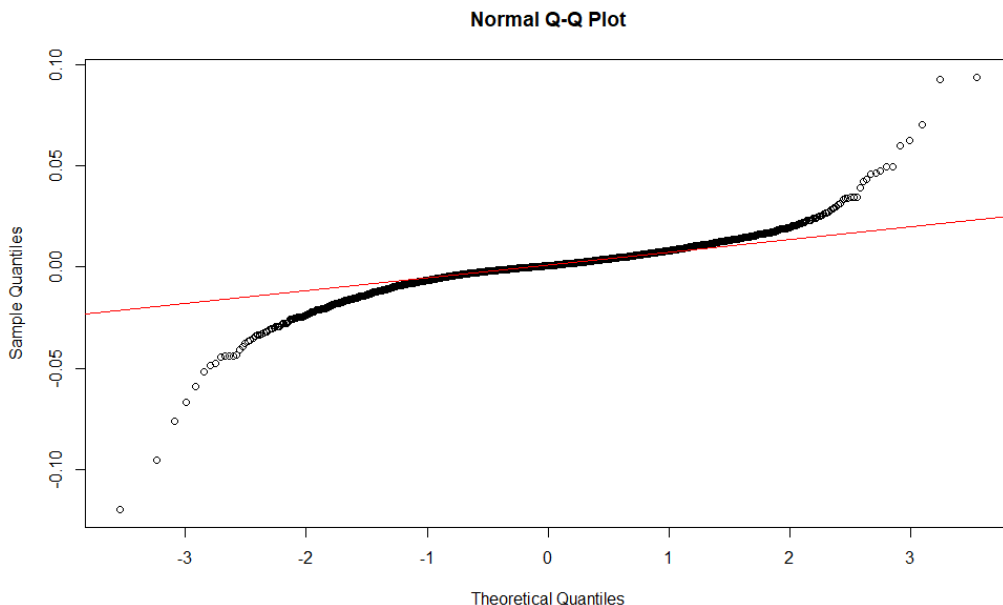
3.1. Validation de modèle *a priori*

La validation des modèles *a priori* a pour objectif de déterminer la distribution la plus proche des données observées et ne s'applique, par conséquent qu'aux modèles paramétriques qui font l'hypothèse que les rendements suivent une loi connue. Parmi les modèles précédemment cités, elle s'appliquera donc à l'ensemble des modèles paramétriques. Nous allons présenter ci-dessous une méthodologie de validation de modèle.

3.1.1. Test de normalité

Tout d'abord il, semble logique de tester la normalité des rendements de l'échantillon observé. Ce test a été réalisé graphiquement précédemment et nous avons vu qu'en pratique, les queues de la distribution des rendements sont plus épaisses que celles d'une loi normale. Cela revient à dire que les valeurs extrêmes sont plus fréquentes que celles prévues par une gaussienne. On utilisera pour cette comparaison, un graphique des quantiles appelé QQ-Plot. Ci-dessous, un exemple appliqué aux rendements du S&P500 sur 10 ans.

Figure 10 : Comparaison des quantiles du S&P500 sur 10 ans avec une gaussienne



Les queues de la distribution empirique n'étant pas sur la ligne rouge cela signifie que les rendements extrêmes sont sous-estimés par la loi normale.

3.1.2. ACF et PACF

Afin d'aller plus loin dans l'analyse d'un échantillon de rendements, il est intéressant d'aborder la notion d'autocorrélation entre les rendements. Les fonctions d'autocorrélation (ACF) et d'autocorrélation partielle (PACF) permettent de déterminer si oui ou non les données sont, ou non, liées entre elles. L'ACF est la corrélation qui existe entre le processus stochastique et une version décalée dans le temps de lui-même. Ci-dessous un exemple de fonction d'autocorrélation pour les rendements d'un actif :

$$ACF(k) = \frac{E[(r_t - \mu)(r_{t+k} - \mu)]}{\sigma^2} \quad (87)$$

avec r_t le rendement au temps t , μ la moyenne des rendements,

σ^2 leur variance et k le décalage temporel

Cette fonction permet de détecter la présence d'une périodicité parmi les données et de faire ressortir des motifs qui se répètent malgré la présence d'un bruit. S'il n'y a pas d'autocorrélation cela revient à dire que le processus se comporte comme un bruit blanc aléatoire. La PACF reprend la même logique, en comparant les corrélations entre des versions décalées du processus, mais elle prend en compte (contrairement à l'ACF) les valeurs intermédiaires. Nous n'entrerons ici pas plus dans le détail.

Les deux fonctions fournissent des valeurs entre -1 et 1 et permettent, à l'aide d'un intervalle de confiance, de déterminer si les corrélations sont significatives ou non. Si les valeurs obtenues pour les différents décalages restent dans les bornes, cela signifie que les données ne présentent pas d'autocorrélation significative. Dans le cas contraire, il existe une autocorrélation significative pour les décalages en question - ceux qui sortent des bornes.

3.1.3. Ljung-Box Q-Test

Le test de Ljung-Box est un autre test d'autocorrélation permettant d'analyser un échantillon de données afin de détecter la présence d'autocorrélation entre les données. Il s'intéresse à la présence d'une corrélation, en analysant les données à plusieurs niveaux de décalage simultanément. L'hypothèse nulle de ce test est :

$$H_0 = \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0 \quad (88)$$

avec les ρ_i les m premiers coefficients d'autocorrélation (les m premiers $ACF(i)$)

En définitive, ce test permet une analyse plus quantitative que les fonctions précédentes, puisqu'il teste les données à plusieurs niveaux de décalage en même temps. En général, il est utilisé pour analyser les résidus (erreurs) d'un modèle ARMA-GARCH et définir s'ils correspondent à un bruit blanc ou non.

Le test fonctionne comme les tests statistiques classiques et fournit une « *p-value* » qui est la probabilité de réalisation de l'hypothèse nulle (hypothèse de travail). En pratique, si la « *p-value* » est faible cela signifie que l'hypothèse nulle au niveau de confiance considéré est peu probable et donc que l'hypothèse contraire est juste. Ce mode de raisonnement correspond à une démonstration par l'absurde.

3.1.4. Tests ARCH de Engle

Le premier test de comportement ARCH de Engle est construit sur le fait que si les résidus (définis comme ϵ_t) sont hétéroscédastiques, les résidus au carré (ϵ_t^2) sont autocorrélés. Le premier type de test consiste ainsi à vérifier si les résidus au carré sont des bruits blancs. On appelle ce genre de test un Portmanteau test et est similaire au test de Ljung-Box sur les carrés des résidus.

Le deuxième type de test proposé par Engle²⁴ (1982) est le test du multiplicateur de Lagrange qui consiste à ajuster un modèle de régression linéaire pour le carré des résidus et à examiner si le modèle ajusté est significatif. L'hypothèse nulle est donc que le carré des résidus est une séquence de bruit blanc, c'est-à-dire que les résidus sont homoscedastiques.

3.1.5. Test de *Goodness-of-fit* de Pearson

Le test du chi carré de Pearson (χ^2) est un test statistique appliqué à des ensembles de données catégorielles pour évaluer la probabilité qu'une différence observée entre les ensembles soit due au hasard. C'est le plus utilisé des nombreux tests statistiques, dont les résultats sont évalués par comparaison à la distribution du chi carré. Ses propriétés ont été étudiées pour la première fois par Karl Pearson en 1900²⁵.

Il teste l'hypothèse nulle, indiquant que la distribution de fréquence de certains événements observés dans un échantillon est cohérente avec une distribution théorique particulière. Les événements considérés doivent être mutuellement exclusifs et avoir une probabilité totale de 1. Un cas courant est celui où les événements couvrent chacun le résultat d'une variable catégorielle. Un exemple simple est l'hypothèse selon laquelle un dé à six faces ordinaires est « juste » (c'est-à-dire que les six résultats ont une probabilité égale de se produire). Nous n'entrerons pas plus dans les détails de son fonctionnement pour ne pas complexifier inutilement ce document. Nous retiendrons simplement que le test de *Goodness-of-fit* du chi carré détermine la mesure dans laquelle la distribution théorique (normale, par exemple) correspond à la distribution empirique.

²⁴ ENGLE, Robert F. A general approach to Lagrange multiplier model diagnostics. *Journal of Econometrics*, 1982, vol. 20, no 1, p. 83-104.

²⁵ PEARSON, Karl. X. On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1900, vol. 50, no 302, p. 157-175.

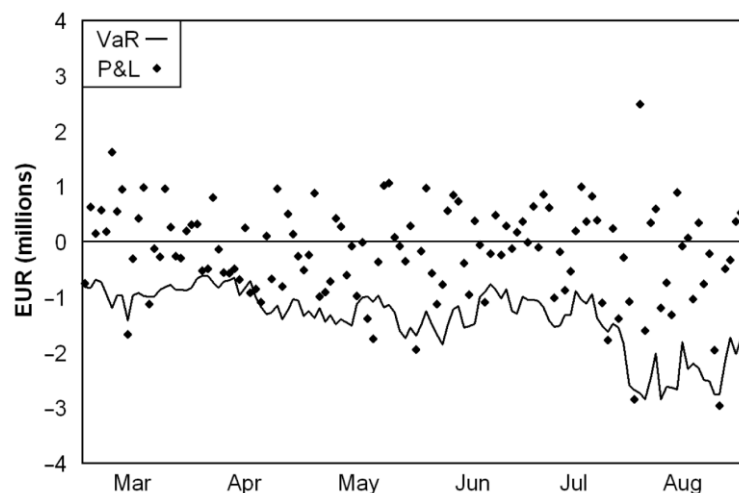
3.2. *Backtesting a posteriori*

La tradition empiriste de la philosophie des sciences nous indique qu'un modèle ne doit pas être évalué sur la base du caractère raisonnable de ses hypothèses ou de la sophistication de son analyse. Il doit être évalué sur la base de l'utilité de ses prévisions. Le *backtesting* est un processus d'évaluation de l'utilité des prédictions d'une mesure de VaR lorsqu'elle est appliquée à un portefeuille particulier au fil du temps. Les mesures de VaR obtenues pour le portefeuille sont enregistrées, tout comme les pertes et profits réalisés par le portefeuille. Une fois que des données suffisantes ont été collectées, des tests statistiques sont appliqués afin d'évaluer la proportion dans laquelle les mesures de la VaR reflètent le degré de risque réel du portefeuille.

Alors que la deuxième édition de RiskMetrics décrivait une mesure linéaire, simple, de la VaR, similaire au système interne de J.P. Morgan, la troisième édition reflétait la diversité de pratiques employées dans d'autres entreprises. Cette édition décrivait des procédures de transformation linéaire, Monte Carlo et historique. Elle illustre également, peut-être pour la première fois, une méthode brute de *backtesting*.

La figure 11 est similaire à un graphique qui figurait dans cette troisième édition. Elle illustre les profits et pertes quotidiens (P&L) par rapport à la VaR (négative) d'un portefeuille. Le graphique résume non seulement la performance quotidienne du portefeuille mais aussi l'évolution de son risque de marché. Il fournit une analyse graphique simple de la performance de la mesure de la VaR de l'entreprise.

Figure 11 : Graphique du P&L quotidien d'un portefeuille et de la VaR à 95%



Avec une mesure de VaR sur un jour à 95 %, nous prévoyons que les pertes quotidiennes dépasseront la VaR environ 5 % du temps, soit six fois sur une période de six mois. Nous définissons un dépassement comme un cas où la perte d'un portefeuille sur une seule période dépasse sa VaR pour cette seule période.

Dès lors, de nombreuses questions se posent : ce résultat de VaR est-il raisonnable ? Si oui, qu'est-ce qui serait considéré comme déraisonnable ? Si nous avons enregistré deux dépassements (ou quatorze), mettrions-nous en doute notre mesure de VaR ? Continuerions-nous à l'utiliser ?

Souhaiterions-nous la remplacer ou la modifier d'une manière ou d'une autre pour améliorer les performances ?

De telles questions ont donné naissance à une littérature sur les techniques permettant de tester statistiquement les mesures de VaR *a posteriori*. Les méthodes de *backtesting* publiées se répartissent principalement en trois catégories :

- Les tests de couverture évaluant la cohérence de la fréquence des dépassements avec le quantile de perte qu'une mesure de VaR est censée refléter.
- Les tests de distribution qui sont des tests d'adéquation appliqués aux distributions de pertes globales prévues par les mesures VaR.
- Les tests d'indépendance évaluant l'indépendance des résultats d'une période à l'autre.

3.3. Tests statistiques

3.3.1. Tests de couverture

Avant même que le document technique RiskMetrics de J.P. Morgan ne décrive un *backtest* graphique, le concept de *backtest* était familier, du moins au sein des institutions utilisant alors la *Value-at-Risk*. En 1995, le Comité de Bâle avait recommandé, que les établissements appliquent une certaine forme de *backtesting* à leurs résultats de VaR. En septembre 1995, J.P. Morgan distribuait à ses premiers clients un projet de document décrivant un test de distribution et un test d'indépendance, qu'ils ont publié l'année suivante. Les premiers *backtests* statistiques publiés étaient des tests de couverture de Paul Kupiec (1995). Dans l'année suivante le Comité de Bâle publiait son fameux *backtest* « *Traffic Light test* ».

3.3.1.1. « *Traffic Light test* »

L'amendement de 1996 à l'accord de Bâle a imposé aux banques une exigence de fonds propres pour le risque de marché. Il a permis aux banques d'utiliser leurs propres mesures de VaR pour en calculer le montant. Les mesures internes devaient soutenir une mesure de la VaR à 99 % sur 10 jours, mais en pratique, les banques étaient autorisées à calculer la VaR à 99 % sur 1 jour et à échelonner le résultat par la racine carrée de 10.

Le Comité de Bâle (1996) a ensuite spécifié une méthodologie pour tester les mesures internes de VaR. Les banques devaient tester leurs résultats de VaR sur un jour à 99 % par rapport au P&L quotidien. Les *backtests* devaient être effectués tous les trimestres en utilisant les 250 derniers jours de données. Sur la base du nombre de dépassements constatés au cours de cette période, la mesure de la VaR est classée dans l'une des trois zones colorées :

Figure 12 : Tableau de correspondance du « Traffic Light Test »²⁶ à 99% sur 250 jours

Nombre de dépassements	Multiplicateur k	Probabilité cumulée $q^*=0.99$
Zone verte		
0	3	0.0811
1	3	0.2858
2	3	0.5432
3	3	0.7581
4	3	0.8922
Zone jaune		
5	3.4	0.9588
6	3.5	0.9863
7	3.65	0.996
8	3.75	0.9989
9	3.85	0.9997
Zone rouge		
10 ou plus	4	0.9999

Les mesures de VaR qui tombent dans la zone verte ne soulèvent pas de préoccupations particulières. Celles qui se trouvent dans la zone jaune doivent faire l'objet d'une surveillance. Le Comité de Bâle a recommandé que, à la discrétion des régulateurs nationaux, les résultats des mesures de VaR de la zone jaune soient plus fortement pondérées dans le calcul des exigences de fonds propres des banques pour le risque de marché (les multiplicateurs recommandés sont indiqués dans le tableau). Les mesures de VaR de la zone rouge ont dû être pondérées plus fortement et ont été présumées défectueuses (les régulateurs nationaux enquêteront sur les causes de tant de dépassements et exigeront que la mesure de VaR soit améliorée).

La procédure du Comité de Bâle ne repose sur aucune théorie statistique pour la vérification des hypothèses. Les trois zones ont été justifiées comme raisonnables à la lumière des probabilités indiquées dans le tableau (et des probabilités supposant $q^* = 0,98$, $q^* = 0,97$, etc., que le comité a également examinées). En raison de sa nature ad hoc, cette méthodologie de *backtesting* n'est pas théoriquement intéressante. Elle est toutefois importante en raison de sa large utilisation par les banques.

²⁶ HOLTON, Glyn A. Value-at-risk. Acad. press, 2003.

3.3.1.2. Test de Kupiec

Le test de couverture de la « proportion d'échecs » (PF en anglais) de Kupiec fut la première méthodologie de *backtesting* publiée²⁷. Il consiste à prendre une VaR observée pour $\alpha + 1$ périodes, avec X dépassements par rapport au P&L réalisé. Il pose l'hypothèse nulle $H_0: q = q^*$, c'est-à-dire que la fréquence empirique (q^*) des dépassements correspond au niveau de confiance de la VaR (q). Le test PF utilise une distribution binomiale $B(\alpha + 1, 1 - q)$ pour construire un rapport de vraisemblance :

$$\Lambda = \frac{q^{\alpha+1-X}(1-q)^X}{\left(\frac{\alpha+1-X}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1-X} \left(\frac{X}{\alpha+1}\right)^X} \quad (89)$$

On en déduit difficilement des probabilités, mais une méthode efficace consiste à considérer que $-2 \log(\Lambda)$ est à peu près une loi du χ^2 centrée à un degré de liberté²⁸. Donc $-2 \log(\Lambda) \sim \chi^2(0,1)$, en supposant H_0 . Pour un niveau de confiance donné ϵ , nous construisons un intervalle de non-rejet $[x_1, x_2]$ tel que sous H_0 :

$$P(X < x_1) \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ et } P(x_2 < X) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (90)$$

Pour ce faire, on calcule le quantile ϵ de la distribution $\chi^2(0,1)$. En posant que $-2 \log(\Lambda)$ vaut ce quantile, on résout l'équation pour trouver X . Il existe deux solutions. En arrondissant la solution inférieure à la baisse et la supérieure à la hausse, on obtient l'intervalle $:[x_1, x_2]$.

Figure 13 : Intervalles de non-rejet du test pour différentes valeurs de q et de $\alpha+1$

alpha+1	0.9	0.95	0.975	0.99
125	[6,20]	[2,12]	[0,8]	[0,4]
250	[16,35]	[6,20]	[2,12]	[0,7]
500	[37,64]	[16,36]	[6,20]	[1,10]
750	[59,92]	[26,50]	[11,28]	[2,14]
1000	[81,120]	[37,65]	[15,36]	[4,17]
1250	[104,147]	[47,79]	[21,43]	[6,20]

En définitive, l'hypothèse nulle sera réfutée si le nombre de dépassements n'appartient pas à l'intervalle au niveau de confiance désiré et au nombre d'observations $\alpha+1$ de la VaR. Dans les autres cas, le test est considéré comme concluant.

²⁷ KUPIEC, Paul. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. The J. of Derivatives, 1995, vol. 3, no 2.

²⁸ Lehmann, E. L. and Joseph P. Romano (2005). Testing Statistical Hypotheses, 3rd ed., New York: Springer.

3.3.2. Test d'indépendance de Christoffersen

Les tests d'indépendance sont une forme de *backtest* qui évaluent l'indépendance des résultats de la mesure de VaR d'une période à l'autre. L'indépendance des dépassements (tI) et l'indépendance des quantiles de perte (tU) sont des formes d'indépendance distinctes qui peuvent être testées.

Nous avons déjà vu que les tests de couverture supposent l'indépendance des dépassements. Si une mesure de VaR échoue à un test d'indépendance, cela peut donc remettre en question les résultats des tests de couverture pour cette mesure de VaR.

Il n'existe aucun moyen de tester directement l'indépendance, les hypothèses nulles portent donc sur des propriétés spécifiques de l'indépendance (par exemple, les dépassements ne se regroupent pas ou les quantiles de perte ne sont pas autocorrélés). Par conséquent, les *backtests* de l'indépendance peuvent être jugés, entre autres, sur la base de l'étendue de leurs hypothèses nulles.

Le test d'indépendance de Christoffersen²⁹ est un test de ratio de vraisemblance qui recherche des dépassements consécutifs exceptionnellement fréquents (i.e. des cas où ${}^{t-1}I = 1$ et ${}^tI = 1$ pour certains t). En étendant notre notation précédente q^* nous définissons :

$$q_0^* = P({}^tI = 0 | {}^{t-1}I = 0) \quad (91)$$

$$q_1^* = P({}^tI = 0 | {}^{t-1}I = 1)$$

Il s'agit des couvertures conditionnelles de la mesure de VaR : ses probabilités réelles de ne pas connaître de dépassement étant donné qu'elle n'a pas (dans le cas de \hat{q}_0) ou a (dans le cas de \hat{q}_1) connu un dépassement au cours de la période précédente. Notre scénario d'hypothèse nulle H_0 est que $\hat{q}_0 = \hat{q}_1 = q^*$. Ce qui revient logiquement à considérer que la probabilité de connaître un dépassement n'est pas liée au résultat précédent, c'est-à-dire que les dépassements sont indépendants.

Si la VaR est observée pour $\alpha + 1$ périodes, il y aura α paires d'observations consécutives (${}^{t-1}I, {}^tI$). On les décompose comme suit :

$$\alpha_{00} + \alpha_{01} + \alpha_{10} + \alpha_{11} = \alpha \quad (92)$$

Où α_{00} est le nombre de paires (${}^{t-1}I, {}^tI$) de la forme (0, 0), α_{01} est le nombre de paires de forme (0, 1) etc. Nous voulons donc tester si :

$$\frac{\alpha_{00}}{\alpha_{00} + \alpha_{01}} \approx \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{10} + \alpha_{11}} \quad (93)$$

Ce qui appuierait notre hypothèse nulle. Nous appliquons un test de ratio de vraisemblance comme suit.

²⁹ CHRISTOFFERSEN, Peter F. Evaluating interval forecasts. International economic review, 1998, p. 841-862.

Nous estimons \hat{q}_0 et \hat{q}_1 avec :

$$\hat{q}_0^* = \frac{\alpha_{00}}{\alpha_{00} + \alpha_{01}} \quad (94)$$

$$\hat{q}_1^* = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{10} + \alpha_{11}}$$

En supposant H_0 , on estime ensuite q^* avec :

$$\hat{q}^* = \frac{\alpha_{00} + \alpha_{10}}{\alpha_{00} + \alpha_{01} + \alpha_{10} + \alpha_{11}} \quad (95)$$

Notre ratio de vraisemblance est alors :

$$\Lambda = \frac{(1 - \hat{q}^*)^{\alpha_{01} + \alpha_{11}} (\hat{q}^*)^{\alpha_{00} + \alpha_{10}}}{(1 - \hat{q}_0^*)^{\alpha_{01}} \hat{q}_0^{*\alpha_{00}} (1 - \hat{q}_1^*)^{\alpha_{11}} \hat{q}_1^{*\alpha_{10}}} \quad (96)$$

Par le même raisonnement que précédemment on s'intéressera à $-2 \log(\Lambda)$, qui est approximativement une loi du χ^2 centrée à un degré de liberté (soit : $-2 \log(\Lambda) \sim \chi^2(0,1)$) en supposant H_0 .

Le 95^{ème} centile de la distribution de $\chi^2(0,1)$ est de 3,841, nous rejetons donc H_0 si $-2 \log(\Lambda) \geq 3,841$. De même, nous rejetons H_0 au niveau 99% si $-2 \log(\Lambda) \geq 6,635$. Le test dépend en grande partie de la fréquence des dépassements consécutifs. Comme il s'agit d'événements intrinsèquement rares, le test a une puissance limitée.

II. Application

Table des matières

Introduction	3
1. Import des données	3
2. Première analyse des données	3
3. Première analyse des log-rendements	6
3.1. Étude de la normalité des rendements	8
3.2. Étude du carré des rendements et de la valeur absolue des rendements	10
4. Choix du meilleur modèle de type ARMA-GARCH et de la loi des erreurs	15
4.1. Choix des ordres p et q pour la composante ARMA(p,q)	15
4.2. Choix du meilleur modèle avec volatilité GARCH	16
4.3. Choix du meilleur modèle avec volatilité eGARCH	19
4.4. Modèle retenu	22
4.4.1. Comparaison des AIC	22
4.4.2. Analyse des paramètres du modèle	22
4.4.2.1. Analyse de la significativité des coefficients du modèle	22
4.4.2.2. Overfitting	23
5. Extreme Value Theory (EVT)	24
5.1. Méthode des maxima par bloc (BMM)	24
5.1.1. Choix de la taille des blocs et des paramètres de la GEV : ξ , μ et σ	24
5.1.2. Diagnostique graphique de la loi des extrêmes estimée (GEV)	25
5.2. Méthode des peaks over threshold (POT)	28
5.2.1. Choix du seuil u	28
5.2.2. Estimation des paramètres de la distribution de Pareto (DPG) : ξ et σ	30
6. Obtention des rendements des dérivés sur la période de backtesting et des données nécessaires aux calculs de VaR	33
6.1. Calcul des rendements du future sur le S&P 500 avec maturité constante de 30 jours	33
6.2. Calcul des rendements du call européen sur le S&P 500 à la monnaie de maturité constante de 30 jours	34

7. Calcul de la Value-at-Risk (VaR)	36
7.1. Value-at-Risk paramétrique	36
7.1.1. VaR Delta-Normale (VaR-DN)	36
7.1.2. VaR de Cornish-Fisher (VaR-CF)	37
7.1.3. VaR avec la théorie des valeurs extrêmes	37
7.1.3.1. VaR par la méthode des blocs de maxima (VaR-BMM)	37
7.1.3.2. VaR par la méthode des pics au-delà du seuil (VaR-POT)	38
7.2. Value-at-Risk par simulation et méthodes semi-paramétriques	38
7.2.1. VaR par simulation historique des facteurs de risque et “full-repricing” (VaR-H)	38
7.2.2. VaR par simulation Monte-Carlo des facteurs de risque et “full-repricing”	38
7.2.2.1. VaR par simulation Monte-Carlo univariée (VaR-MC-U)	38
7.2.2.2. VaR par simulation Monte-Carlo bivariée (VaR-MC-BV)	39
8. Calcul de la Tail Conditional Expectation (TCE)	41
8.1. Tail Conditional Expectation paramétriques	41
8.1.1. TCE delta-normale (TCE-DN)	41
8.1.2. TCE de Cornish-Fisher (TCE-CF)	42
8.1.3. TCE avec la théorie des valeurs extrêmes	42
8.1.3.1. TCE par la méthode des blocs de maxima (TCE-BMM)	42
8.1.3.2. TCE par la méthode des pics au-delà du seuil (TCE-POT)	42
8.2. Tail Conditional Expectation par simulation et semi-paramétriques	42
8.2.1. TCE par simulation historique des facteurs de risque et “full-repricing” (TCE-H)	42
8.2.2. TCE par simulation Monte-Carlo des facteurs de risque et “full-repricing”	43
8.2.2.1. TCE par simulation Monte-Carlo univarié (TCE-MC-U)	43
8.2.2.2. TCE par simulation Monte-Carlo bivariée (TCE-MC-BV)	43
9. Backtesting de la Value-at-Risk	44
9.1. Performance de la VaR du S&P500	44
9.1.1. VaRs à 95%	44
9.1.2. VaRs à 99%	45
9.2. Performance de la VaR du future sur le S&P500	46
9.2.1. VaRs à 95%	46
9.2.1. VaRs à 99%	47
9.2. Performance de la VaR de l’option européenne sur le S&P500	48
9.2.1. VaRs à 95%	48
9.2.1. VaRs à 99%	49
Conclusion	50

Introduction

Dans ce document nous appliquons les résultats de la première partie à deux produits dérivés : un future sur le S&P500 et un call européen sur le S&P500. L'objectif est de calculer les mesures de risque pour ces produits selon les différentes méthodologies présentées et d'en analyser l'efficacité au regard du P&L effectif réalisé. Nous noterons dans la suite la VaR d'un actif comme variation de la valeur de l'actif (log-rendement), elle sera donc notée négativement sans perte de généralité.

Les données que nous allons utiliser dans cette seconde partie de notre étude sont les prix quotidiens ajustés de clôture ("Adj. Close Price") du S&P500 sur la période allant de Septembre 2000 à fin Août 2020. Le set de données sera divisé en deux plages temporelles. La première, de Septembre 2000 à fin Août 2015 servira d'historique pour la détermination des meilleurs modèles a priori. La seconde, de Septembre 2015 à fin Août 2020 servira pour le backtesting de nos modèles. Notre étude revient donc à considérer que nous sommes actuellement à la fin Août 2015 et que nous établissons des modèles que l'on backtestera avec les P&L réalisés à partir de Septembre 2015.

1. Import des données

Ci-dessous, nous importons les prix quotidiens de clôture ajustés sur les 20 ans d'historique (2000-2020). Nous formons ensuite les deux sets de données :

```
# Import des données du S&P500 depuis Yahoo finance et calcul des rendements
prices <- read.zoo("data/~GSPC.csv", index.column = 1,
                 header=T, sep=";", format = "%d/%m/%Y")
returns<-log(prices/stats::lag(prices,-1))

# Prix et rendements pour le choix du modèle (2000-2015)
prices_md<- as.xts(prices) ["/20150831"]
returns_md<- as.xts(returns) ["/20150831"]

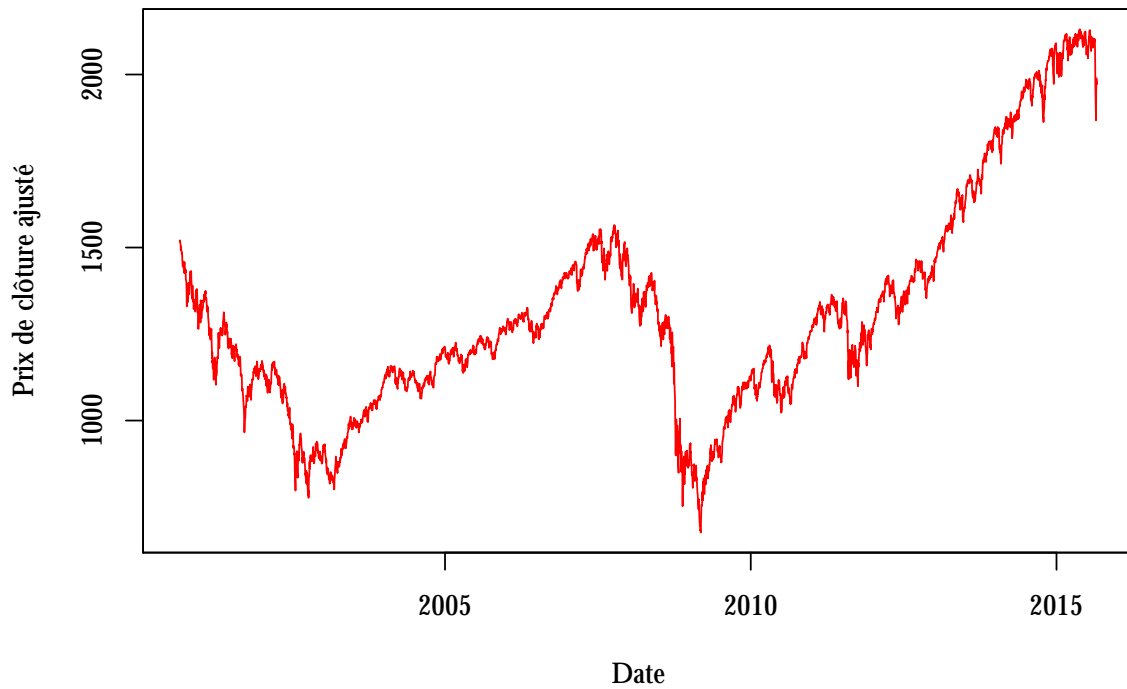
# Prix et rendements pour le backtesting (2015-2020)
prices_bt<- as.xts(prices) ["20150901/20200831"]
returns_bt<- as.xts(returns) ["20150901/20200831"]

rm(prices, returns)
```

2. Première analyse des données

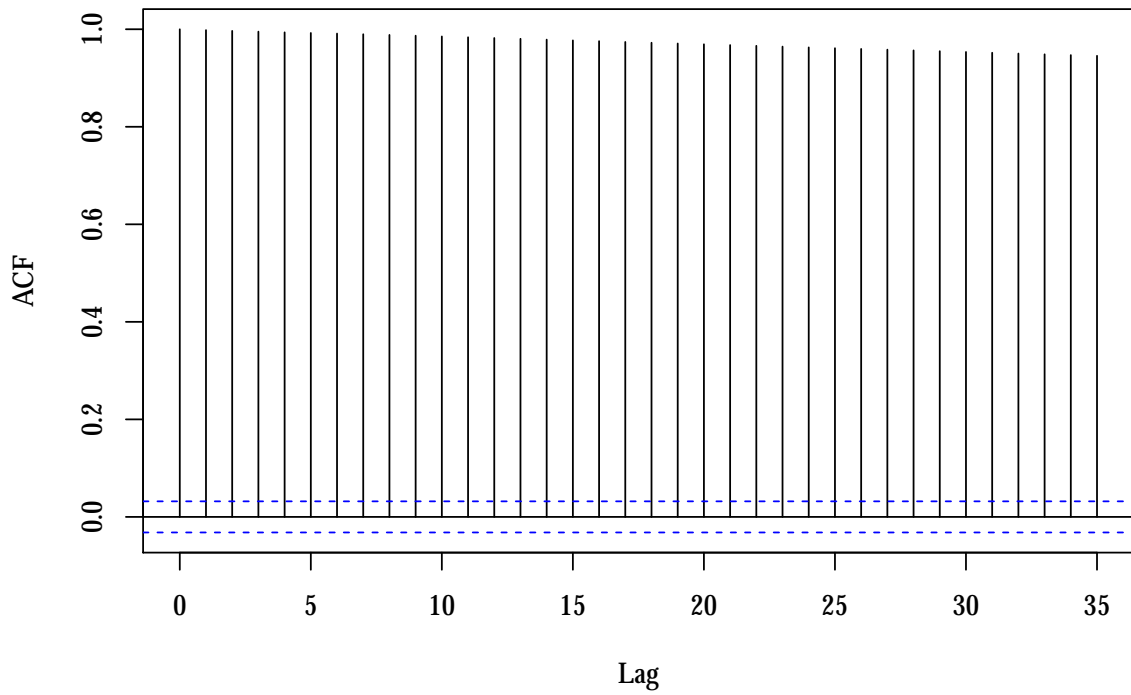
Dans cette section nous débuterons l'analyse des données du S&P500. Commençons tout d'abord par afficher l'évolution des prix sur la période.

Évolution des prix du S&P500

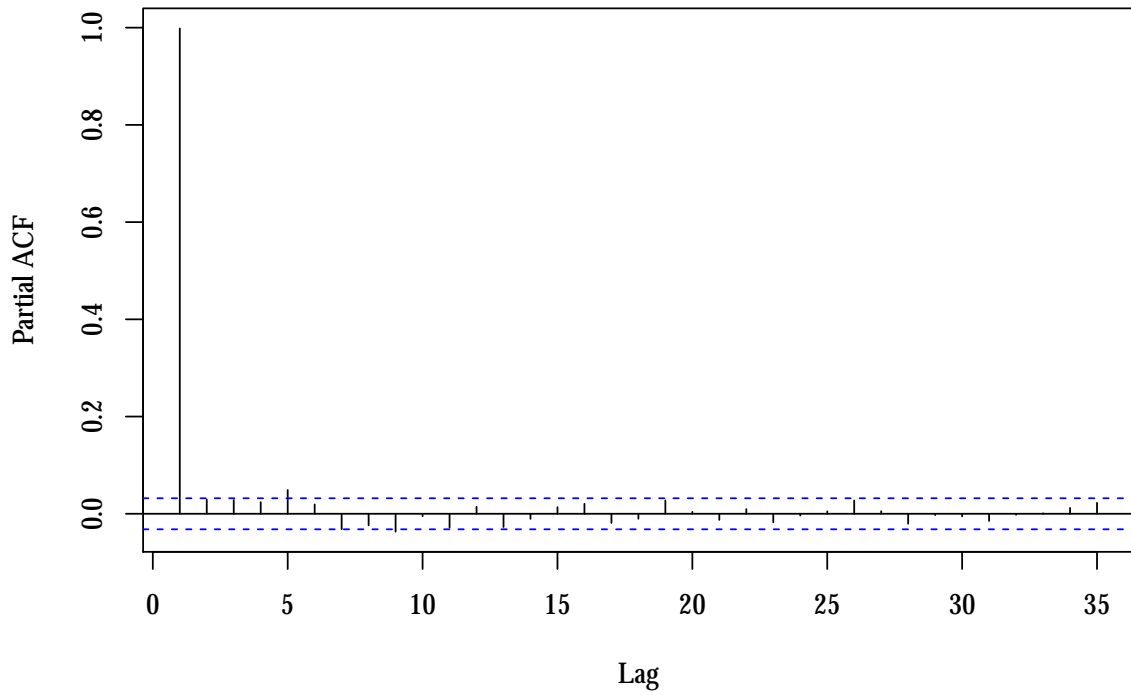


Nous apercevons que cette série temporelle possède des clusters de prix hauts et bas à certaines périodes. Le prix évolue au cours du temps et est donc volatil. La présence de clusters semble indiquer un phénomène de corrélation entre les prix : à un prix haut succèdera probablement un prix haut. Voyons ce qu'il en est à l'aide des fonctions d'autocorrélation (ACF et PACF) :

ACF des prix du S&P500 (2000–2015)



PACF des prix du S&P500 (2000–2015)

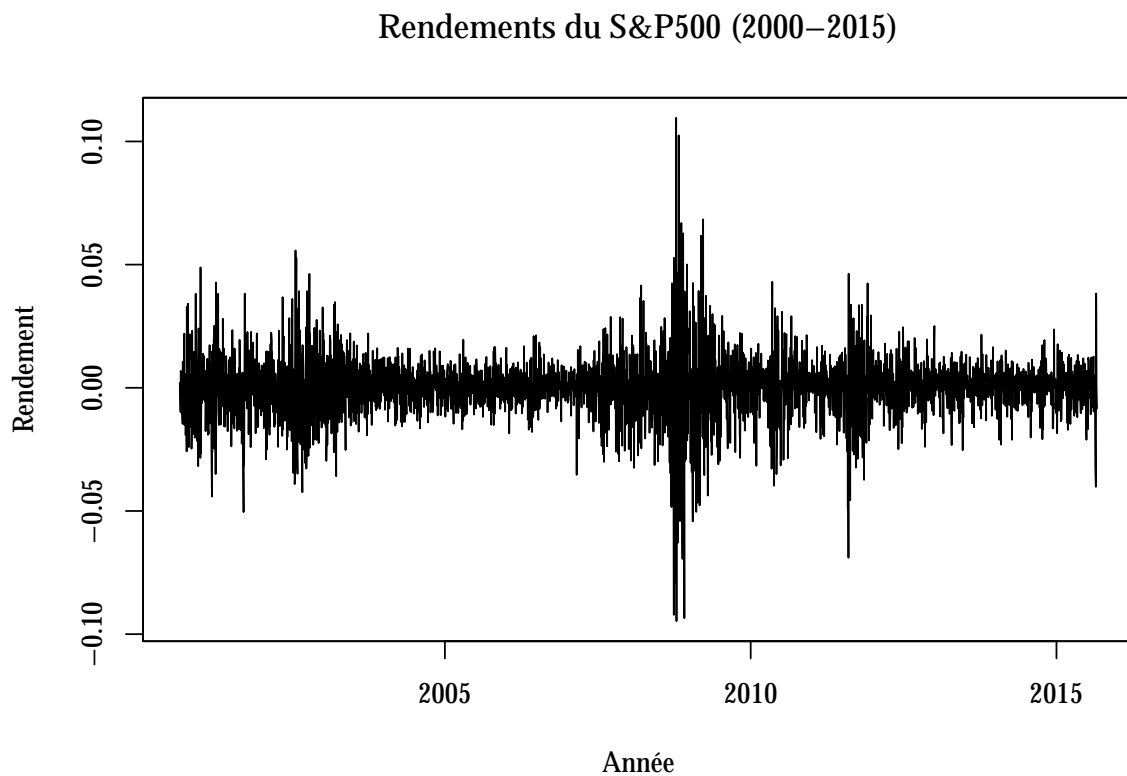


Nous observons que l'ACF diminue lentement vers zéro, ce qui signifie que les chocs affectent le

processus de façon permanente. Nous pouvons donc conclure que la série n'est pas stationnaire. Nous nous intéresserons donc aux rendements journaliers (log-rendements) du S&P500.

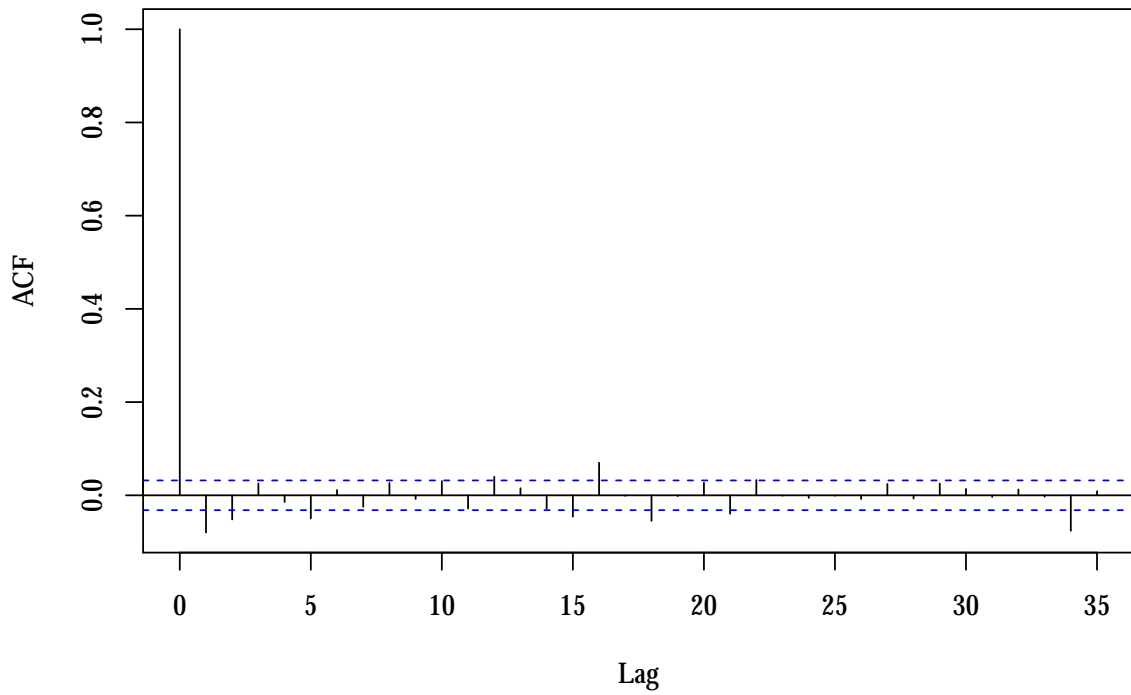
3. Première analyse des log-rendements

Affichons l'évolution des rendements sur la période :

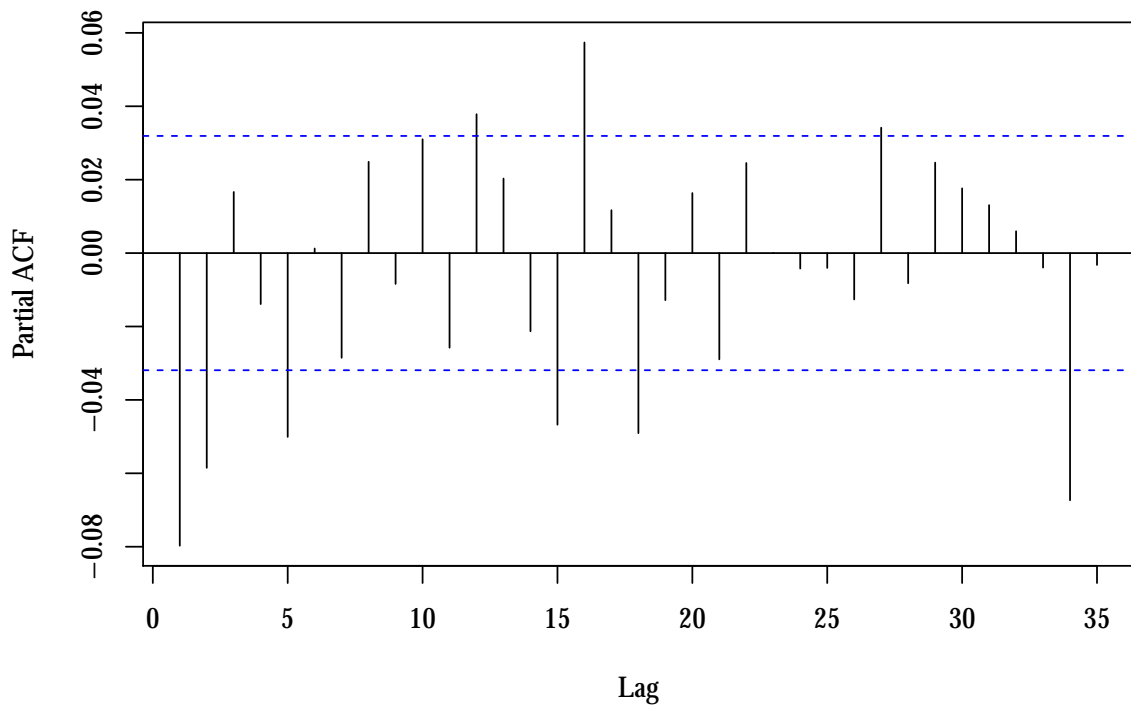


On observe des périodes de volatilité extrême notamment vers 2002, 2008-2009 et 2010-2012. Néanmoins, les rendements restent autour de la valeur zéro ce qui indique une certaine stationnarité a priori. Intéressons nous à l'autocorrélation des rendements avec les graphiques ACF et PACF.

ACF des rendements du S&P500 (2000–2015)



PACF des rendements du S&P500 (2000–2015)



Les rendements ne semblent pas être fortement corrélés mais il existe tout de même une relation non

négligeable entre eux (Lag =1, 2, 5 par exemple) dont il conviendra de tenir compte dans la suite.

3.1. Étude de la normalité des rendements

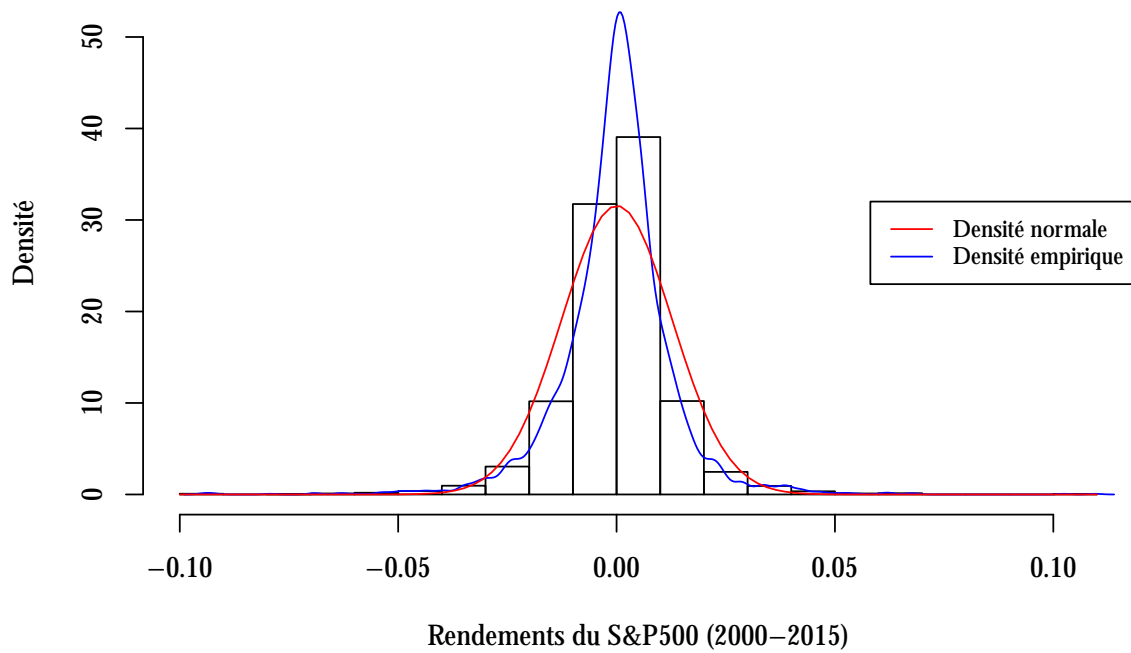
Analysons les statistiques usuelles de notre échantillon de rendements.

Tab. 1 : Statistiques des rendements du S&P500 (2000-2015)

	Valeur de paramètres
nobs	3771.000000
NAs	0.000000
Minimum	-0.094695
Maximum	0.109572
1. Quartile	-0.005371
3. Quartile	0.005832
Mean	0.000069
Median	0.000564
Sum	0.261957
SE Mean	0.000206
LCL Mean	-0.000334
UCL Mean	0.000473
Variance	0.000160
Stdev	0.012641
Skewness	-0.180626
Kurtosis	8.466389

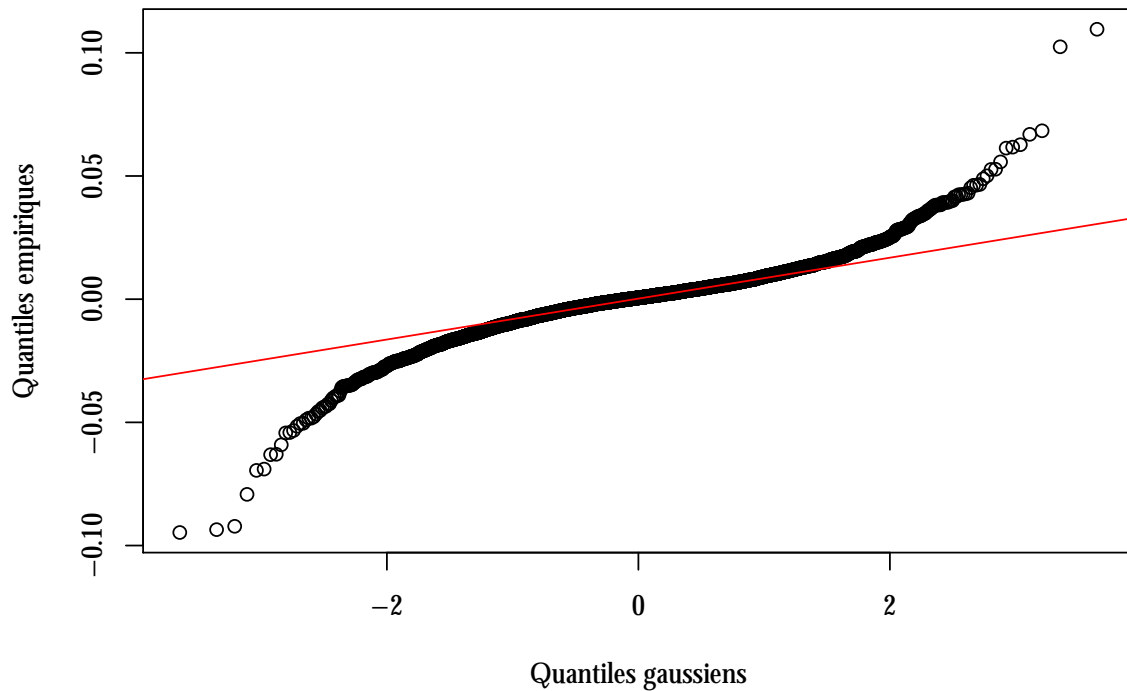
Nous observons que la moyenne des rendements est très proche de zéro et que la distribution des rendements a un kurtosis très élevé (ce qui indique des queues de distribution épaisses). La distribution possède, par ailleurs, un skew négatif ce qui signifie que la queue gauche de la distribution est plus étalée. Affichons l'histogramme des rendements, la densité empirique associée et la densité gaussienne afin d'observer graphiquement les variations :

Histogramme des rendements du S&P500 (2000–2015)



L'allure de la courbe semble correspondre plus ou moins à celle d'une loi normale bien qu'effectivement, les valeurs autour de la moyenne semblent plus fréquentes que le prévoit la distribution gaussienne. Intéressons nous aux quantiles de la distribution empirique face à ceux de la loi normale.

Comparaison des quantiles empiriques et gaussiens

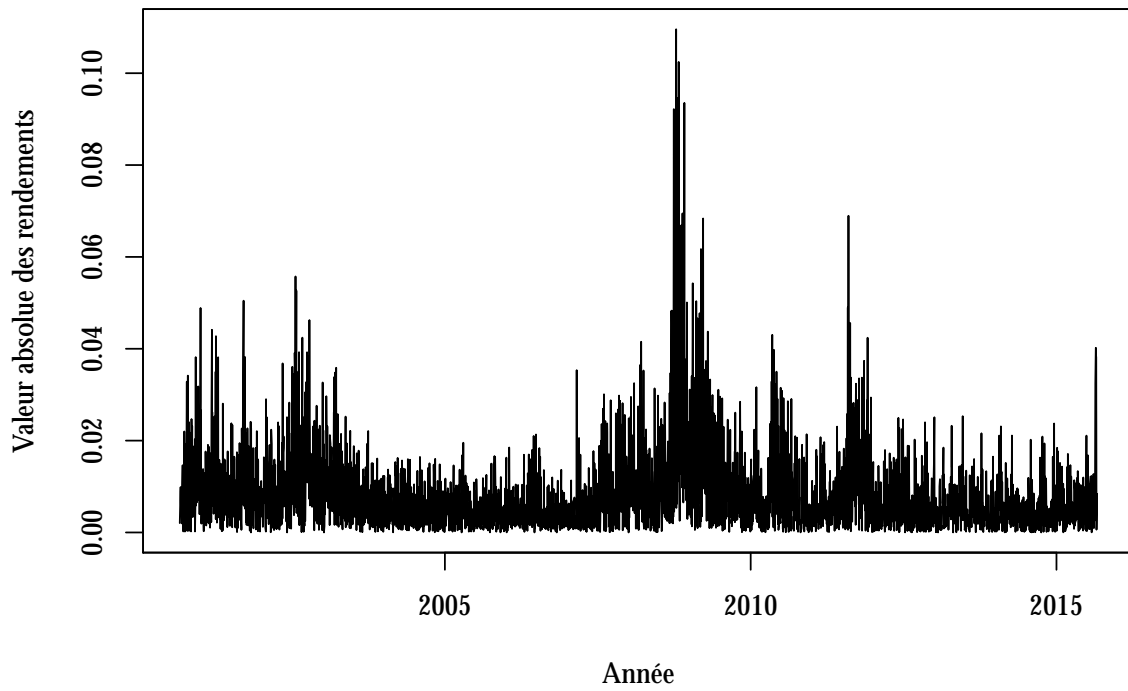


D'après l'histogramme et le QQ-Plot, on conclut que les rendements possèdent une distribution proche d'une gaussienne mais avec des queues plus épaisses à chaque extrémité et des valeurs plus fréquemment proches de zéro. Afin d'étudier la corrélation entre les rendements, que l'on entrevoyait à la lumière du graphique de l'ACF, nous étudions ci-dessous le carré des rendements et la valeur absolue des rendements.

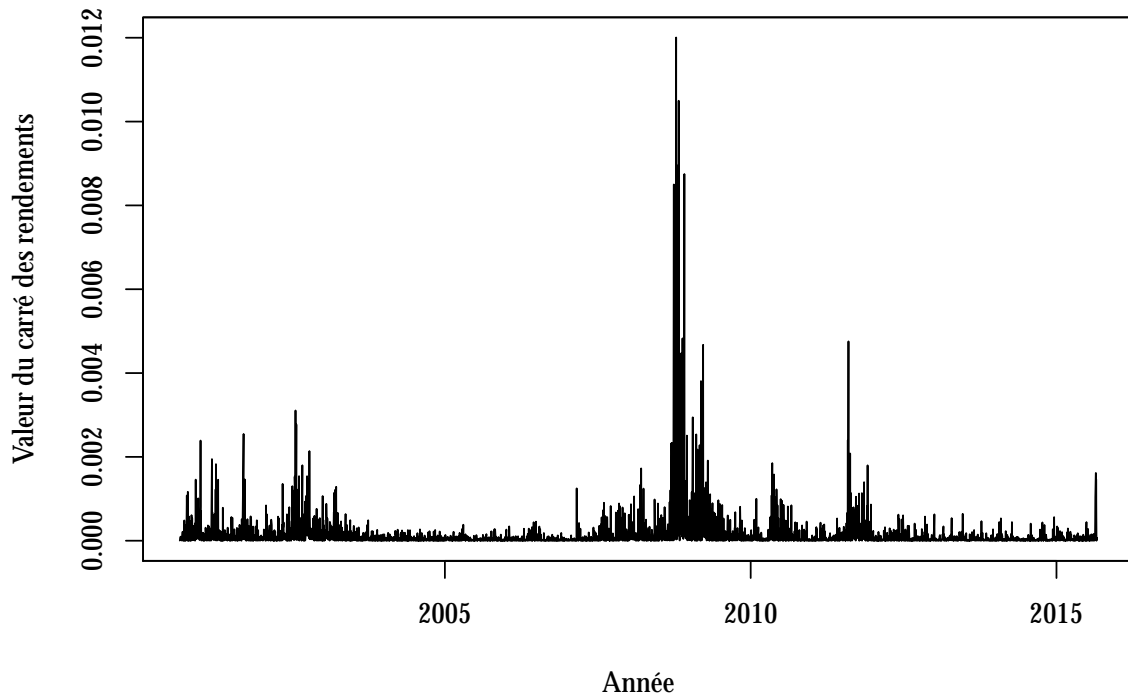
3.2. Étude du carré des rendements et de la valeur absolue des rendements

Commençons tout d'abord par afficher les rendements au carré et les rendements absolus.

Évolution de la valeur absolue des rendements



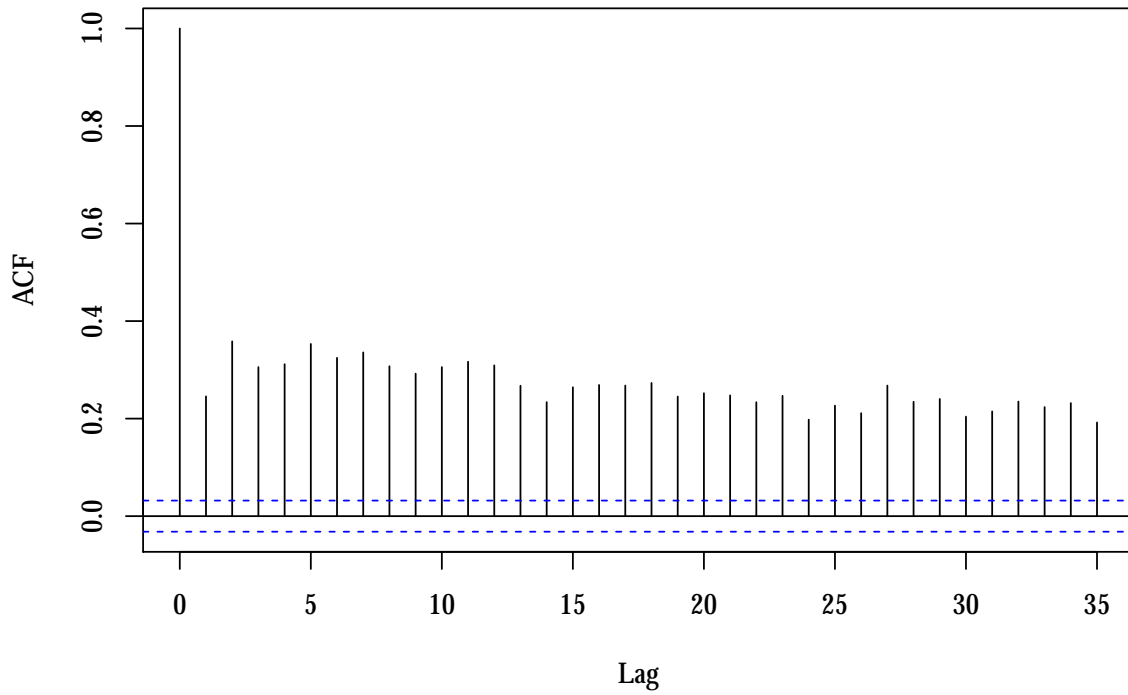
Évolution du carré des rendements



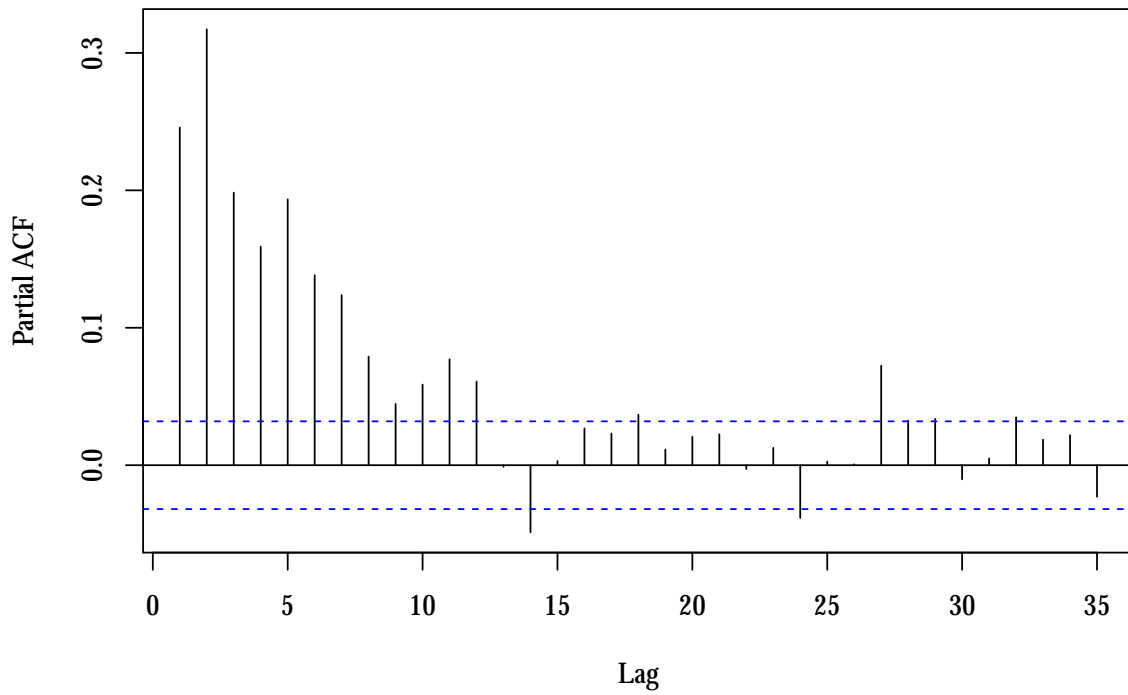
On observe sur ces graphiques, surtout le second, que des clusters de volatilité sont notables. Par exemple,

une forte volatilité autour de 2008. Ceci semble indiquer que la volatilité conditionnelle n'est pas constante : un choc de volatilité a un impact sur la volatilité lors de petites périodes de temps. L'hypothèse consistant à prendre une volatilité constante est donc déclinée. Il faudra utiliser des modèles à volatilité stochastique. Recherchons donc la présence d'un effet ARCH dans les deux séries de données. Pour ce faire, traçons les graphiques ACF et PACF du carré des rendements et de la valeur absolue des rendements :

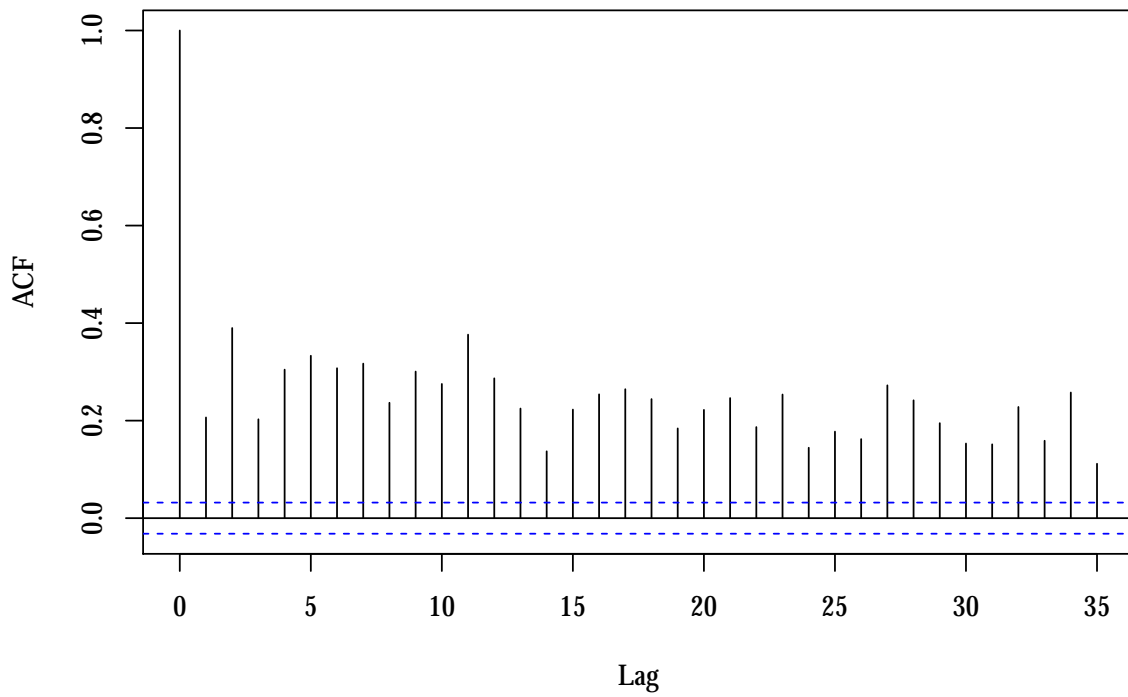
ACF de la valeur absolue des rendements



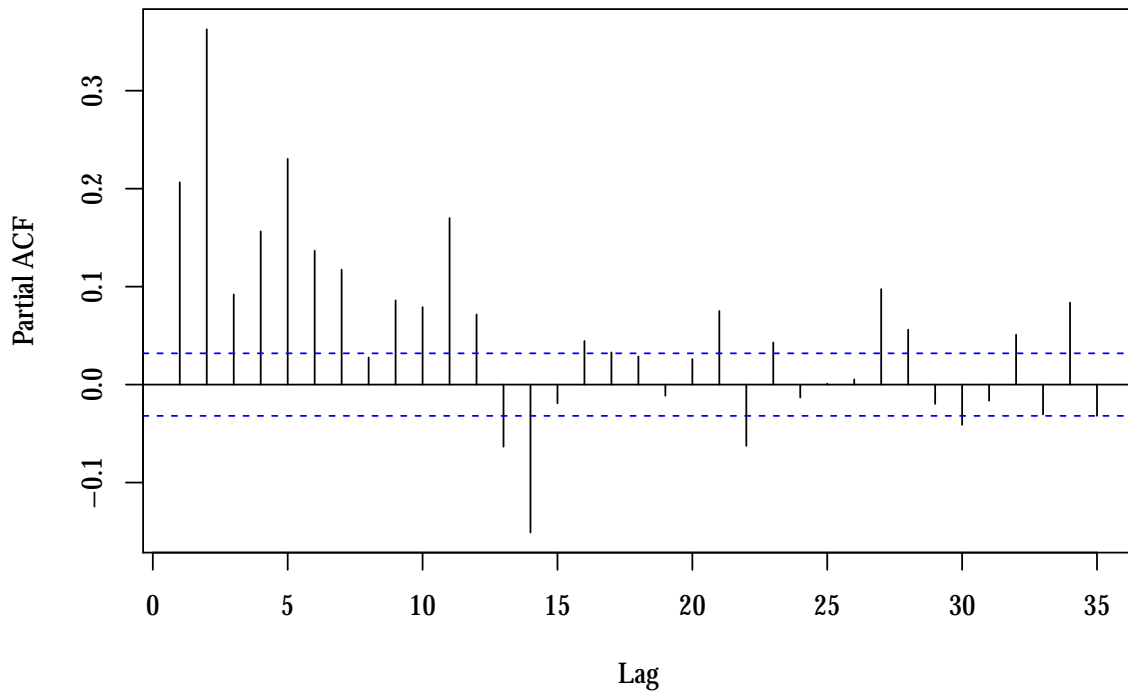
PACF de la valeur absolue des rendements



ACF du carré des rendements



PACF du carré des rendements



D'après les graphiques précédents, il est évident que la valeur absolue des rendements et le carré des rendements sont fortement autocorrélés. Les rendements ont ainsi une forte dépendance non-linéaire. Vérifions à nouveau cela grâce à un test de Ljung-Box. Dans un premier temps sur la valeur absolue des rendements :

```
##  
## Box-Ljung test  
##  
## data: abs(returns_md)  
## X-squared = 712.88, df = 2, p-value < 2.2e-16  
  
##  
## Box-Ljung test  
##  
## data: abs(returns_md)  
## X-squared = 1432.5, df = 4, p-value < 2.2e-16  
  
##  
## Box-Ljung test  
##  
## data: abs(returns_md)  
## X-squared = 2301.9, df = 6, p-value < 2.2e-16
```

Puis sur le carré des rendements :

```
##  
## Box-Ljung test  
##  
## data: returns_md^2  
## X-squared = 734.83, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

```
##
## Box-Ljung test
##
## data: returns_md^2
## X-squared = 1240.3, df = 4, p-value < 2.2e-16
```

```
##
## Box-Ljung test
##
## data: returns_md^2
## X-squared = 2016.6, df = 6, p-value < 2.2e-16
```

Les tests de Ljung-Box ci-dessus montrent tous que l'hypothèse nulle de non-autocorrélation est fortement rejetée dans les deux cas (carré et valeur absolue). Ceci indique un effet ARCH sur les rendements du S&P500. C'est-à-dire que la variance des rendements est conditionnelle et autorégressive. L'idée d'utiliser des modèles à volatilité ARCH est donc bien fondée. Nous nous intéresserons donc dans la suite de notre étude aux modèles ARMA(p,q)-GARCH(p',q')/eGARCH(p',q') dont la loi des erreurs reste à déterminer.

4. Choix du meilleur modèle de type ARMA-GARCH et de la loi des erreurs

Le choix des meilleurs paramètres de modèle se réalise sur la base du critère d'information d'Akaike (AIC). Le critère d'information d'Akaike (AIC) est une méthode mathématique permettant d'évaluer la mesure dans laquelle un modèle correspond aux données dont il est issu. En statistiques, l'AIC est utilisé pour comparer différents modèles possibles et déterminer lequel est le mieux adapté aux données. L'AIC est calculé à partir :

- Du nombre de variables indépendantes utilisées pour construire le modèle.
- De l'estimation du maximum de vraisemblance du modèle (la mesure dans laquelle le modèle reproduit fidèlement les données).

Le modèle le mieux adapté, selon l'AIC, est celui qui explique le plus grand nombre de variations avec le moins de variables indépendantes possibles. Plus l'AIC est petit et plus le modèle est adapté.

4.1. Choix des ordres p et q pour la composante ARMA(p,q)

Nous allons calculer l'AIC pour chacun des modèles et choisir celui qui semble le meilleur. Pour ce faire nous allons tester les valeurs p et q allant de 0 à 4 :

Tab. 2 : AIC des modèles ARMA(p,q)

	p = 0	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4
q = 0	NA	-22282.29	-22293.22	-22292.27	-22290.99
q = 1	-22285.17	-22290.54	-22292.20	-22290.35	-22293.33
q = 2	-22292.44	-22291.61	-22291.30	-22288.22	-22295.05
q = 3	-22291.55	-22289.66	NA	-22312.13	-22310.31
q = 4	-22291.13	-22292.89	-22298.88	-22310.21	-22308.27

D'après le tableau précédent, le meilleur modèle semble être ARMA(3,3) car il a le AIC le plus bas (-22312,13).

4.2. Choix du meilleur modèle avec volatilité GARCH

Dans cette section nous allons définir une liste de modèles qui paraissent être de bons candidats avant de calculer pour chacun leur AIC. Nous choisirons parmi ceux-ci celui avec l'AIC le plus bas. Par ailleurs, un autre facteur pesant dans notre décision sera le comportement des résidus ou erreurs (autocorrélation ou non) et le Goodness-of-fit test qui permettront respectivement de savoir, si le caractère ARCH a été entièrement absorbé par le modèle (plus d'autocorrélation des résidus) et si les résidus suivent la loi des erreurs définie préalablement. Les modèles auxquels nous nous intéresserons sont les suivants :

- ARMA(3,3)-GARCH(p',q') avec erreurs normales
- ARMA(3,3)-GARCH(p',q') avec erreurs student-t
- ARMA(3,3)-GARCH(p',q') avec erreurs skewed student-t
- ARMA(3,3)-GARCH(p',q') avec erreurs ged (general excess distribution)
- ARMA(3,3)-GARCH(p',q') avec erreurs sged (skewed ged)

Ci-dessous un tableau des AIC des différents modèles avec p' et q' variant de 1 à 2 :

Tab. 3 : AIC des modèles ARMA(3,3)-GARCH(p',q')

	Valeur de l'AIC
ARMA(3,3)-GARCH(1,1) avec erreurs normales	-6.385217277782
ARMA(3,3)-GARCH(1,1) avec erreurs student-t	-6.41245710270281
ARMA(3,3)-GARCH(1,1) avec erreurs skewed student-t	-6.42341885522205
ARMA(3,3)-GARCH(1,1) avec erreurs ged	Pas de convergence
ARMA(3,3)-GARCH(1,1) avec erreurs skewed ged	-6.43148697406279
ARMA(3,3)-GARCH(1,2) avec erreurs normales	-6.38533343504641
ARMA(3,3)-GARCH(1,2) avec erreurs student-t	-6.413277839403
ARMA(3,3)-GARCH(1,2) avec erreurs skewed student-t	-6.42675940965929
ARMA(3,3)-GARCH(1,2) avec erreurs ged	-6.41800517712916
ARMA(3,3)-GARCH(1,2) avec erreurs skewed ged	-6.43095660513104
ARMA(3,3)-GARCH(2,1) avec erreurs normales	-6.39087307202355
ARMA(3,3)-GARCH(2,1) avec erreurs student-t	-6.4232661333643
ARMA(3,3)-GARCH(2,1) avec erreurs skewed student-t	-6.43116937741502
ARMA(3,3)-GARCH(2,1) avec erreurs ged	-6.42421646891744
ARMA(3,3)-GARCH(2,1) avec erreurs skewed ged	-6.43778003864725
ARMA(3,3)-GARCH(2,2) avec erreurs normales	-6.39090900554299
ARMA(3,3)-GARCH(2,2) avec erreurs student-t	-6.41949564268906
ARMA(3,3)-GARCH(2,2) avec erreurs skewed student-t	-6.43067360723962
ARMA(3,3)-GARCH(2,2) avec erreurs ged	Pas de convergence
ARMA(3,3)-GARCH(2,2) avec erreurs skewed ged	-6.43734829885591

D'après le tableau ci-dessus, le meilleur modèle est ARMA(3,3)-GARCH(2,1) avec erreurs skewed-ged avec un AIC à -6.43778. Étudions plus en détail ce modèle en affichant l'ensemble des données obtenues :

```
##
## *-----*
## *          GARCH Model Fit          *
## *-----*
##
## Conditional Variance Dynamics
## -----
## GARCH Model : sGARCH(2,1)
## Mean Model  : ARFIMA(3,0,3)
## Distribution : sged
##
```

```

## Optimal Parameters
## -----
##      Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
## mu      0.000415   0.000105   3.94399 0.000080
## ar1     0.095894   0.011969   8.01169 0.000000
## ar2    -0.557020   0.021102  -26.39601 0.000000
## ar3     0.682000   0.011160   61.11102 0.000000
## ma1    -0.176276   0.006979  -25.25922 0.000000
## ma2     0.513474   0.020389   25.18343 0.000000
## ma3    -0.751036   0.005215 -144.00842 0.000000
## omega   0.000002   0.000002    1.27088 0.203770
## alpha1  0.007830   0.014992    0.52227 0.601482
## alpha2  0.116543   0.029521    3.94786 0.000079
## beta1   0.860202   0.026363   32.62965 0.000000
## skew    0.860564   0.018364   46.86189 0.000000
## shape   1.399892   0.053332   26.24857 0.000000
##
## Robust Standard Errors:
##      Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
## mu      0.000415   0.000115   3.59585 0.000323
## ar1     0.095894   0.019362   4.95266 0.000001
## ar2    -0.557020   0.028644 -19.44611 0.000000
## ar3     0.682000   0.016286  41.87668 0.000000
## ma1    -0.176276   0.007749 -22.74907 0.000000
## ma2     0.513474   0.022619  22.70075 0.000000
## ma3    -0.751036   0.007965 -94.29631 0.000000
## omega   0.000002   0.000008    0.26303 0.792529
## alpha1  0.007830   0.020871    0.37515 0.707549
## alpha2  0.116543   0.107822    1.08089 0.279748
## beta1   0.860202   0.116188    7.40356 0.000000
## skew    0.860564   0.033180  25.93633 0.000000
## shape   1.399892   0.138655  10.09622 0.000000
##
## LogLikelihood : 12151.43
##
## Information Criteria
## -----
##
## Akaike      -6.4378
## Bayes       -6.4163
## Shibata     -6.4378
## Hannan-Quinn -6.4301
##
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
## -----
##
##              statistic p-value
## Lag[1]              3.884 0.04874
## Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [17] 15.370 0.00000
## Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [29] 21.471 0.02054
## d.o.f=6
## H0 : No serial correlation
##
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
## -----
##
##              statistic p-value
## Lag[1]              5.303 0.02128
## Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [8]  8.348 0.07999
## Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [14] 11.153 0.12947

```

```

## d.o.f=3
##
## Weighted ARCH LM Tests
## -----
##           Statistic Shape Scale P-Value
## ARCH Lag[4]  0.02901 0.500 2.000  0.8648
## ARCH Lag[6]  1.73649 1.461 1.711  0.5515
## ARCH Lag[8]  2.92895 2.368 1.583  0.5568
##
## Nyblom stability test
## -----
## Joint Statistic:  64.9286
## Individual Statistics:
## mu      0.55266
## ar1     0.06092
## ar2     0.20706
## ar3     0.04285
## ma1     0.03847
## ma2     0.18062
## ma3     0.07511
## omega  10.50900
## alpha1  0.17469
## alpha2  0.27752
## beta1   0.33099
## skew    0.72458
## shape   0.65129
##
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
## Joint Statistic:      2.89 3.15 3.69
## Individual Statistic:  0.35 0.47 0.75
##
## Sign Bias Test
## -----
##           t-value      prob sig
## Sign Bias      2.310 2.094e-02 **
## Negative Sign Bias  1.158 2.469e-01
## Positive Sign Bias  2.562 1.044e-02 **
## Joint Effect      37.819 3.087e-08 ***
##
##
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
## -----
##   group statistic p-value(g-1)
## 1   20      24.73      0.1696
## 2   30      30.60      0.3846
## 3   40      44.44      0.2531
## 4   50      53.91      0.2920
##
##
## Elapsed time : 4.003189

```

On note que la distribution des erreurs correspond bien à ce que l'on attend car les p-values du test Goodness-of-fit sont supérieures à 0,05. Mais en ce qui concerne les résidus, on observe toujours un comportement ARCH. Ceci signifie que malgré l'ordre (2,1) de la composante GARCH, une autocorrélation persiste. Nous allons essayer d'y remédier en passant à un autre modèle de volatilité :

eGARCH ou GARCH exponentiel. Il se note mathématiquement comme suit :

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^p (\alpha_k \epsilon_{t-k} + \gamma_k (|\epsilon_{t-k}| - E(|\epsilon_{t-k}|))) + \sum_{k=1}^q \beta_k \log \sigma_{t-k}^2$$

Avec σ_t^2 la variance conditionnelle, ω , β , α et γ des coefficients correspondant respectivement à :

- la log-variance non-conditionnelle
- l'auto-régression de la log-variance
- l'impact des chocs précédents sur la log-variance
- l'impact de la valeur absolue des chocs précédents sur la log-variance

Dans l'équation précédente $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ et z_t correspond à la loi des erreurs. La présence des deux coefficients α et γ permet de tenir compte de l'asymétrie de l'impact des chocs (erreurs ou résidus) sur la log-variance. En effet un choc négatif et positif peuvent entretenir des relations distinctes avec la log-variance. Par exemple un choc négatif peut avoir un impact plus fort qu'un choc positif : ce qui signifie que les marchés sont plus sensibles à une baisse qu'à une hausse.

4.3. Choix du meilleur modèle avec volatilité eGARCH

Nous allons reprendre la méthodologie précédente avec les modèles de volatilité eGARCH. C'est-à-dire que nous allons tester les modèles et comparer leur AIC.

Tab. 4 : AIC des modèles ARMA(3,3)-eGARCH(p',q')

	Valeur de l'AIC
ARMA(3,3)-eGARCH(1,1) avec erreurs normales	-6.429423
ARMA(3,3)-eGARCH(1,1) avec erreurs student-t	-6.453156
ARMA(3,3)-eGARCH(1,1) avec erreurs skewed student-t	-6.465592
ARMA(3,3)-eGARCH(1,1) avec erreurs ged	-6.455587
ARMA(3,3)-eGARCH(1,1) avec erreurs skewed ged	-6.469677
ARMA(3,3)-eGARCH(1,2) avec erreurs normales	-6.428911
ARMA(3,3)-eGARCH(1,2) avec erreurs student-t	-6.450146
ARMA(3,3)-eGARCH(1,2) avec erreurs skewed student-t	-6.463021
ARMA(3,3)-eGARCH(1,2) avec erreurs ged	-6.453905
ARMA(3,3)-eGARCH(1,2) avec erreurs skewed ged	-6.469147
ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) avec erreurs normales	-6.444099
ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) avec erreurs student-t	-6.465958
ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) avec erreurs skewed student-t	-6.479528
ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) avec erreurs ged	-6.466031
ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) avec erreurs skewed ged	-6.483143
ARMA(3,3)-eGARCH(2,2) avec erreurs normales	-6.443893
ARMA(3,3)-eGARCH(2,2) avec erreurs student-t	-6.465681
ARMA(3,3)-eGARCH(2,2) avec erreurs skewed student-t	-6.480653
ARMA(3,3)-eGARCH(2,2) avec erreurs ged	-6.465722
ARMA(3,3)-eGARCH(2,2) avec erreurs skewed ged	-6.482890

On obtient pour le modèle ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) avec erreurs skewed ged, un AIC à -6.483143, ce qui en fait le meilleur. Intéressons nous plus en détail aux résultats fournis par ce modèle.

```
##
## *-----*
## *          GARCH Model Fit          *
## *-----*
```

```

##
## Conditional Variance Dynamics
## -----
## GARCH Model : eGARCH(2,1)
## Mean Model : ARFIMA(3,0,3)
## Distribution : sged
##
## Optimal Parameters
## -----
##      Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
## mu      0.000172   0.000126    1.36596 0.17195
## ar1     -0.076891   0.007442   -10.33254 0.00000
## ar2     -0.664495   0.008422   -78.89622 0.00000
## ar3      0.511021   0.006501    78.60207 0.00000
## ma1      0.009105   0.010607    0.85842 0.39066
## ma2      0.628368   0.012437   50.52313 0.00000
## ma3     -0.568775   0.009775   -58.18813 0.00000
## omega   -0.193140   0.003119   -61.92515 0.00000
## alpha1  -0.266763   0.018735   -14.23853 0.00000
## alpha2   0.132320   0.011574   11.43240 0.00000
## beta1    0.979285   0.000019 51751.21266 0.00000
## gamma1  -0.161230   0.026508    -6.08240 0.00000
## gamma2   0.290467   0.020521   14.15428 0.00000
## skew     0.843722   0.016783   50.27280 0.00000
## shape    1.488384   0.049117   30.30261 0.00000
##
## Robust Standard Errors:
##      Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
## mu      0.000172   0.000175    0.98409 0.325070
## ar1     -0.076891   0.003770   -20.39447 0.000000
## ar2     -0.664495   0.027003   -24.60791 0.000000
## ar3      0.511021   0.006298    81.13721 0.000000
## ma1      0.009105   0.009148    0.99529 0.319597
## ma2      0.628368   0.031492   19.95307 0.000000
## ma3     -0.568775   0.006801   -83.63296 0.000000
## omega   -0.193140   0.004113   -46.96386 0.000000
## alpha1  -0.266763   0.038770    -6.88068 0.000000
## alpha2   0.132320   0.045662    2.89779 0.003758
## beta1    0.979285   0.000048 20307.01569 0.000000
## gamma1  -0.161230   0.077390    -2.08335 0.037219
## gamma2   0.290467   0.021058   13.79344 0.000000
## skew     0.843722   0.021008   40.16217 0.000000
## shape    1.488384   0.057855   25.72596 0.000000
##
## LogLikelihood : 12238.97
##
## Information Criteria
## -----
##
## Akaike      -6.4831
## Bayes       -6.4583
## Shibata     -6.4832
## Hannan-Quinn -6.4743
##
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
## -----
##
##                      statistic p-value
## Lag[1]                0.5529 0.4571

```

```

## Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [17]    8.9173  0.5468
## Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [29]   15.0814  0.4632
## d.o.f=6
## H0 : No serial correlation
##
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
## -----
##                statistic p-value
## Lag[1]                0.001326  0.9710
## Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [8]    1.365782  0.9422
## Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [14]   4.222228  0.8583
## d.o.f=3
##
## Weighted ARCH LM Tests
## -----
##                Statistic Shape Scale P-Value
## ARCH Lag[4]    0.001483 0.500 2.000  0.9693
## ARCH Lag[6]    0.188978 1.461 1.711  0.9710
## ARCH Lag[8]    0.783332 2.368 1.583  0.9535
##
## Nyblom stability test
## -----
## Joint Statistic:  5.0759
## Individual Statistics:
## mu      0.45526
## ar1     0.05284
## ar2     0.24938
## ar3     0.05605
## ma1     0.03149
## ma2     0.22912
## ma3     0.10355
## omega   0.31444
## alpha1  1.08159
## alpha2  0.80323
## beta1   0.30304
## gamma1  0.31294
## gamma2  0.14120
## skew    0.76517
## shape   0.51606
##
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
## Joint Statistic:      3.26 3.54 4.07
## Individual Statistic:  0.35 0.47 0.75
##
## Sign Bias Test
## -----
##                t-value  prob sig
## Sign Bias          0.2335 0.8154
## Negative Sign Bias  0.7214 0.4707
## Positive Sign Bias  0.6889 0.4909
## Joint Effect       1.3396 0.7198
##
##
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
## -----
##  group statistic p-value(g-1)
## 1    20     9.764     0.9585
## 2    30    25.714     0.6407

```



```
## 3    40    34.091    0.6931
## 4    50    38.613    0.8567
##
##
## Elapsed time : 7.077443
```

Ce modèle satisfait à toutes nos exigences. En effet, les résidus ne semblent pas présenter de comportement ARCH contrairement au résultat obtenu avec un modèle GARCH classique. De plus, le test de Goodness-of-Fit ne permet pas de rejeter l'hypothèse de la distribution skewed ged.

4.4. Modèle retenu

4.4.1. Comparaison des AIC

D'après ce qui a été réalisé précédemment nous comparons les AIC des deux modèles ARMA(3,3)-GARCH(2,1) sged et ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged :

Tab. 5 : Comparaison des AIC

	Valeur de l'AIC
ARMA(3,3)-GARCH(2,1) sged	-6.437780
ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	-6.483143

Le meilleur modèle est d'assez loin le modèle à volatilité eGARCH. C'est celui que nous retiendrons. Intéressons nous maintenant à ses coefficients.

```
##          mu          ar1          ar2          ar3          ma1
## 0.0001718297 -0.0768908552 -0.6644951238 0.5110208741 0.0091052680
##          ma2          ma3          omega          alpha1          alpha2
## 0.6283683601 -0.5687746472 -0.1931395105 -0.2667631153 0.1323196434
##          beta1          gamma1          gamma2          skew          shape
## 0.9792846055 -0.1612302291 0.2904668375 0.8437220862 1.4883835679
```

Ce qui correspond au modèle suivant :

$$r_t = 0,000172 - 0,07689r_{t-1} - 0,6645r_{t-2} + 0,5110r_{t-3} + 0,0091\epsilon_{t-1} + 0,6284\epsilon_{t-2} - 0,5688\epsilon_{t-3} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\log \sigma_t^2 = -0,1931 - 0,2667\epsilon_{t-1} - 0,1612(|\epsilon_{t-1}| - E(|\epsilon_{t-1}|))$$

$$+ 0,1323\epsilon_{t-2} + 0,2905(|\epsilon_{t-2}| - E(|\epsilon_{t-2}|)) + 0,9793 \log \sigma_{t-1}^2$$

avec z_t qui suit une loi générale des excès décalée avec $\xi = 0,844$ et $\nu = 1,489$.

4.4.2. Analyse des paramètres du modèle

4.4.2.1. Analyse de la significativité des coefficients du modèle

Nous allons étudier, dans cette section, la significativité des coefficients estimés pour notre modèle. Pour savoir si un coefficient est significatif, c'est-à-dire s'il ne vaut pas zéro, on utilisera la t-value qui est une mesure de l'écart entre le paramètre estimé et 0. Comme ce test repose sur une loi de student-t qui converge vers une loi normale centrée réduite, on utilise la règle du pouce qui nous dit que si la t-value est supérieure à 2 en valeur absolue (car 95% des valeurs de la loi normale se situent dans un intervalle de longueur 4σ centré autour de la moyenne i.e. leur valeur absolue est inférieure à $2\sigma=2$) alors le paramètre est significatif. Ceci signifie donc que le vrai paramètre devrait être non-nul.

Tab. 6 : Paramètres du modèle

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	0.0001718	0.0001258	1.3659574	0.1719523
ar1	-0.0768909	0.0074416	-10.3325422	0.0000000
ar2	-0.6644951	0.0084224	-78.8962168	0.0000000
ar3	0.5110209	0.0065014	78.6020686	0.0000000
ma1	0.0091053	0.0106070	0.8584175	0.3906619
ma2	0.6283684	0.0124372	50.5231294	0.0000000
ma3	-0.5687746	0.0097748	-58.1881296	0.0000000
omega	-0.1931395	0.0031189	-61.9251486	0.0000000
alpha1	-0.2667631	0.0187353	-14.2385314	0.0000000
alpha2	0.1323196	0.0115741	11.4324014	0.0000000
beta1	0.9792846	0.0000189	51751.2126568	0.0000000
gamma1	-0.1612302	0.0265076	-6.0824042	0.0000000
gamma2	0.2904668	0.0205215	14.1542781	0.0000000
skew	0.8437221	0.0167829	50.2727985	0.0000000
shape	1.4883836	0.0491173	30.3026085	0.0000000

En procédant de la sorte, on observe que tous les coefficients sont significatifs ($|t\text{-value}| > 2$) à l'exception de μ et de ma1. Pour le premier cela n'a pas d'importance car ce terme sera présent dans tous les modèles ARMA-GARCH. En ce qui concerne le paramètre ma1, nous voyons qu'il est peu significatif mais comme les paramètres ma2 et ma3 le sont on ne diminuera pas l'ordre du modèle. Intéressons nous maintenant à une augmentation des ordres de notre modèle.

4.4.2.2. Overfitting

L'idée dans cette section est de procéder à l'inverse de ce qui a été fait précédemment, en s'intéressant aux modèles avec des ordres supérieurs et de déterminer si l'ajout de paramètres supplémentaires rend le modèle plus précis ou s'il le complexifie inutilement. Comme d'habitude nous comparons les modèles à l'aide de leur AIC :

Tab. 7 : AIC des modèles overfittés

	Valeur de l'AIC
ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) avec erreurs skewed-ged	-6.483143
ARMA(3,3)-eGARCH(2,2) avec erreurs skewed-ged	-6.482890
ARMA(3,3)-eGARCH(3,1) avec erreurs skewed-ged	-6.488760
ARMA(3,3)-eGARCH(3,2) avec erreurs skewed-ged	-6.488299
ARMA(3,4)-eGARCH(2,1) avec erreurs skewed-ged	-6.482826
ARMA(3,4)-eGARCH(2,2) avec erreurs skewed-ged	-6.483889
ARMA(3,4)-eGARCH(3,1) avec erreurs skewed-ged	-6.487060
ARMA(3,4)-eGARCH(3,2) avec erreurs skewed-ged	-6.488018
ARMA(4,3)-eGARCH(2,1) avec erreurs skewed-ged	-6.482912
ARMA(4,3)-eGARCH(2,2) avec erreurs skewed-ged	-6.482652
ARMA(4,3)-eGARCH(3,1) avec erreurs skewed-ged	-6.488526
ARMA(4,3)-eGARCH(3,2) avec erreurs skewed-ged	-6.488068
ARMA(4,4)-eGARCH(2,1) avec erreurs skewed-ged	-6.482557
ARMA(4,4)-eGARCH(2,2) avec erreurs skewed-ged	-6.485586
ARMA(4,4)-eGARCH(3,1) avec erreurs skewed-ged	-6.488111
ARMA(4,4)-eGARCH(3,2) avec erreurs skewed-ged	-6.487650

Nous obtenons ci-dessus les AIC des modèles overfittés. Parmi les 16 modèles, 10 ont un meilleur AIC que le modèle retenu (-6,483143). Nous allons donc effectuer un test sur la significativité de leurs paramètres,

afin de voir si les paramètres ajoutés ne sont pas statistiquement négligeables : ce qui revient à dire que l'on peut considérer qu'ils sont égaux à 0, et donc se ramener à un modèle plus simple.

Tab. 8 : Recherche des paramètres non significatifs des modèles overfittés

Paramètres non significatifs	
ARMA(3,3)-eGARCH(3,1) sged	alpha2 = 0.22 gamma3 = 1.08
ARMA(3,3)-eGARCH(3,2) sged	alpha2 = 0.32 gamma3 = 0.97
ARMA(3,4)-eGARCH(2,2) sged	ma4 = 1.03
ARMA(3,4)-eGARCH(3,1) sged	ma4 = 0.83 alpha2 = 0.2 gamma3 = 1.05
ARMA(3,4)-eGARCH(3,2) sged	ar1 = 1.51 ma4 = -0.71 alpha2 = 0.31 gamma3 = 0.92
ARMA(4,3)-eGARCH(3,1) sged	ar4 = -0.39 alpha2 = 0.21 gamma3 = 1.03
ARMA(4,3)-eGARCH(3,2) sged	ar4 = -1.23 alpha2 = 0.31 gamma3 = 0.92
ARMA(4,4)-eGARCH(2,2) sged	beta2 = -1.81
ARMA(4,4)-eGARCH(3,1) sged	alpha2 = 0.23 gamma3 = 1.03
ARMA(4,4)-eGARCH(3,2) sged	alpha2 = 0.34

On constate que dans tous les modèles overfittés, certains paramètres deviennent non significatifs ce qui signifie que ces modèles sont simplifiables et ils tombent donc dans le piège de l'overfitting : l'ajout de paramètres supplémentaires qui compliquent le modèle à outrance. Le modèle ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged est donc retenu pour sa relative simplicité (par rapport aux modèles ci-dessus) qui permettra de meilleures performances (temps de calcul) lors des phases de simulation.

5. Extreme Value Theory (EVT)

5.1. Méthode des maxima par bloc (BMM)

5.1.1. Choix de la taille des blocs et des paramètres de la GEV : ξ , μ et σ

L'idée de cette section est de découper les pertes (l'opposé des rendements) en blocs, et de prendre en compte les maxima sur chacun de ces blocs. La théorie nous permet ensuite d'utiliser la convergence de la loi des maxima vers une loi GEV dont les paramètres sont à déterminer. L'enjeu est dans un premier temps de choisir la taille des blocs sur lesquels prendre les maxima. Pour ceci nous essaierons plusieurs tailles de blocs et nous intéresserons à la convergence vers une loi GEV grâce à des tests statistiques. Nous recherchons des maxima qui sont à la fois stationnaires et dont la distribution correspond bien à une GEV. Les tests utilisés seront le test KPSS de stationnarité et le test KS (Kolmogorov-Smirnov) de Goodness-of-Fit.

Tab. 9 : Tests statistiques sur les différentes tailles de bloc

	p-value KPSS	p-value KS	Param. de localisation	Param. de forme	Param. d'échelle
Taille de bloc : 20	0.010	0.918	0.015	0.169	0.008
Taille de bloc : 22	0.019	0.880	0.015	0.269	0.007
Taille de bloc : 24	0.023	0.836	0.015	0.303	0.007
Taille de bloc : 26	0.019	0.863	0.016	0.212	0.008
Taille de bloc : 28	0.029	0.967	0.016	0.200	0.008
Taille de bloc : 30	0.044	0.829	0.016	0.292	0.007
Taille de bloc : 32	0.038	0.947	0.017	0.217	0.008
Taille de bloc : 34	0.050	0.967	0.017	0.231	0.008
Taille de bloc : 36	0.066	0.846	0.017	0.311	0.007
Taille de bloc : 38	0.059	0.869	0.018	0.254	0.008
Taille de bloc : 40	0.039	0.891	0.018	0.260	0.008
Taille de bloc : 42	0.056	0.940	0.018	0.254	0.008
Taille de bloc : 44	0.063	0.997	0.018	0.268	0.008
Taille de bloc : 46	0.047	0.849	0.019	0.272	0.008
Taille de bloc : 48	0.070	0.977	0.019	0.267	0.008
Taille de bloc : 50	0.072	0.861	0.019	0.283	0.008

D'après le tableau précédent, nous allons retenir une taille de bloc de 42, ce qui donne bien :

- une p-value > 0.05 au test KPSS de stationnarité
- une p-value > 0.05 au test de Kolmogorov-Smirnov de Goodness-of-Fit vis à vis de la GEV

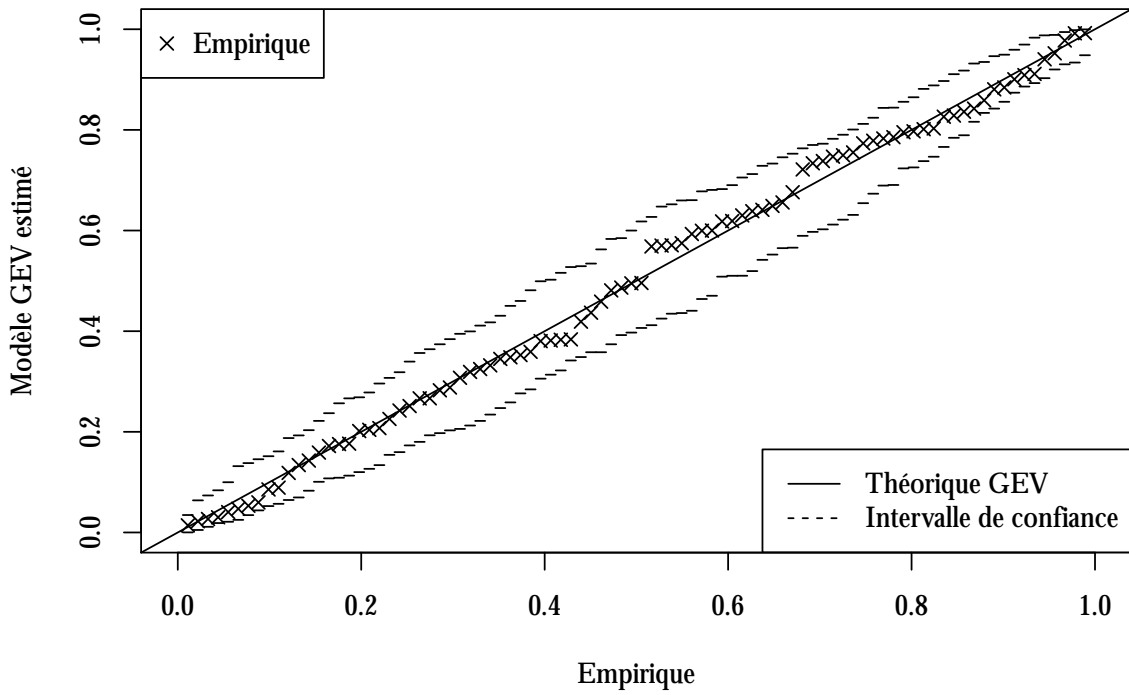
On obtient donc un modèle qui consiste à dire que la pire perte sur 42 jours suit une loi GEV de paramètres :

- localisation = $\mu = 0,0181513$
- forme = $\xi = 0,2539079$
- échelle = $\sigma = 0,0079701$

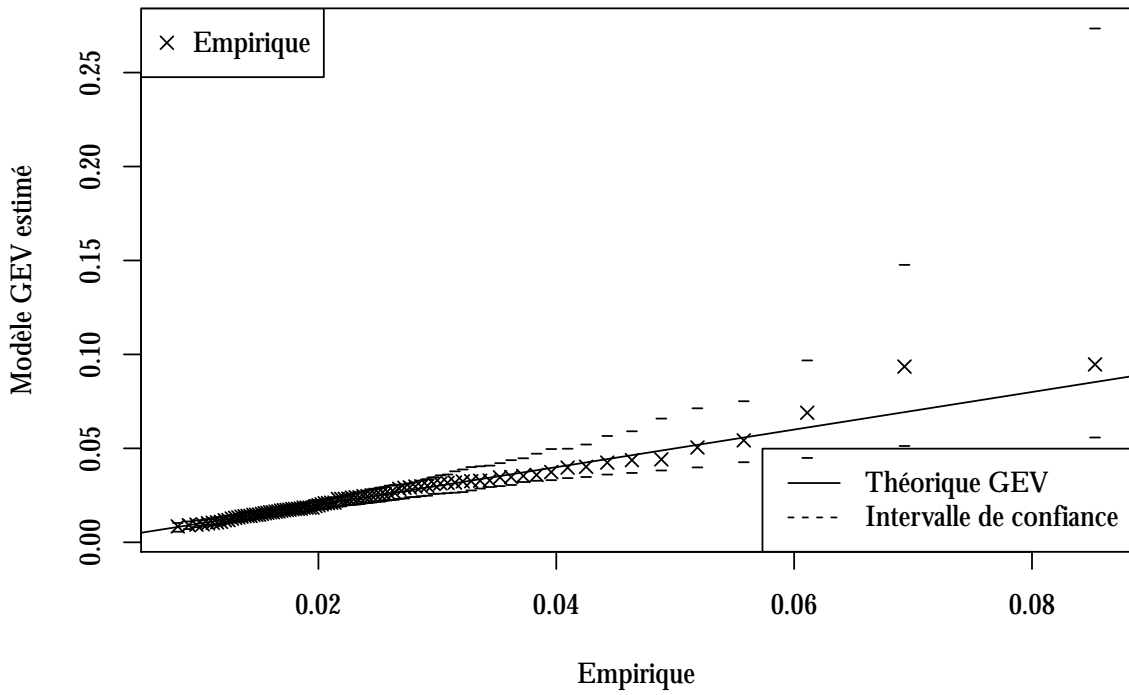
5.1.2. Diagnostic graphique de la loi des extrêmes estimée (GEV)

Analysons graphiquement la distribution estimée face à la distribution empirique des maxima pour une taille de bloc de 42 jours.

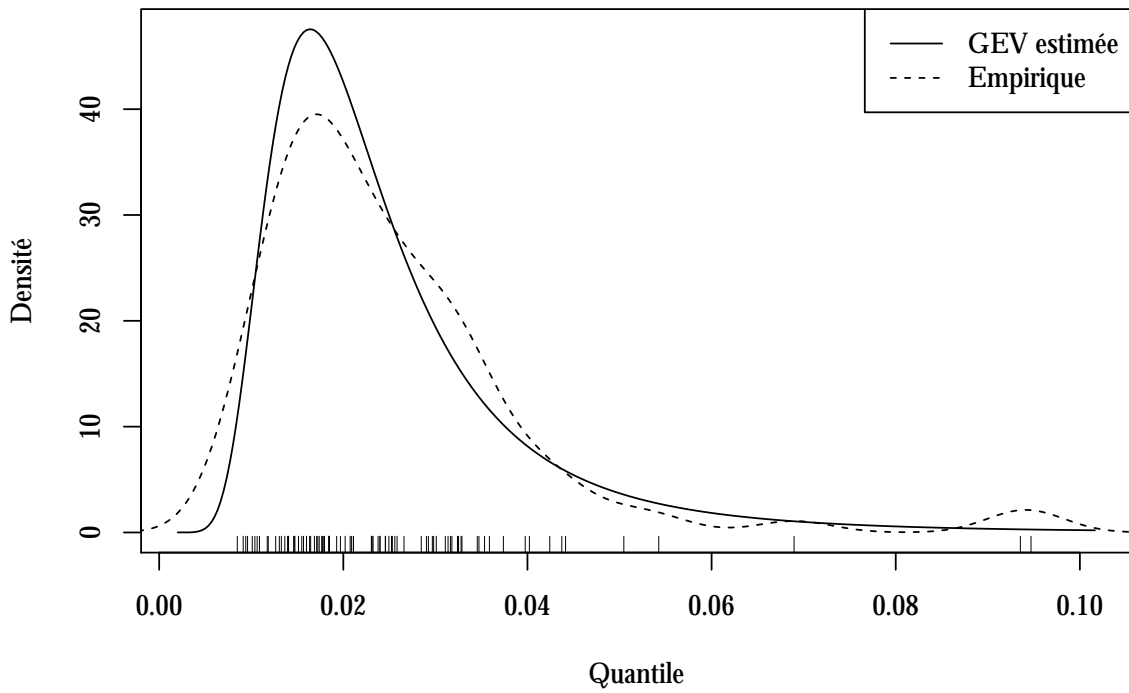
Graphique de comparaison des probabilités (PP-plot)



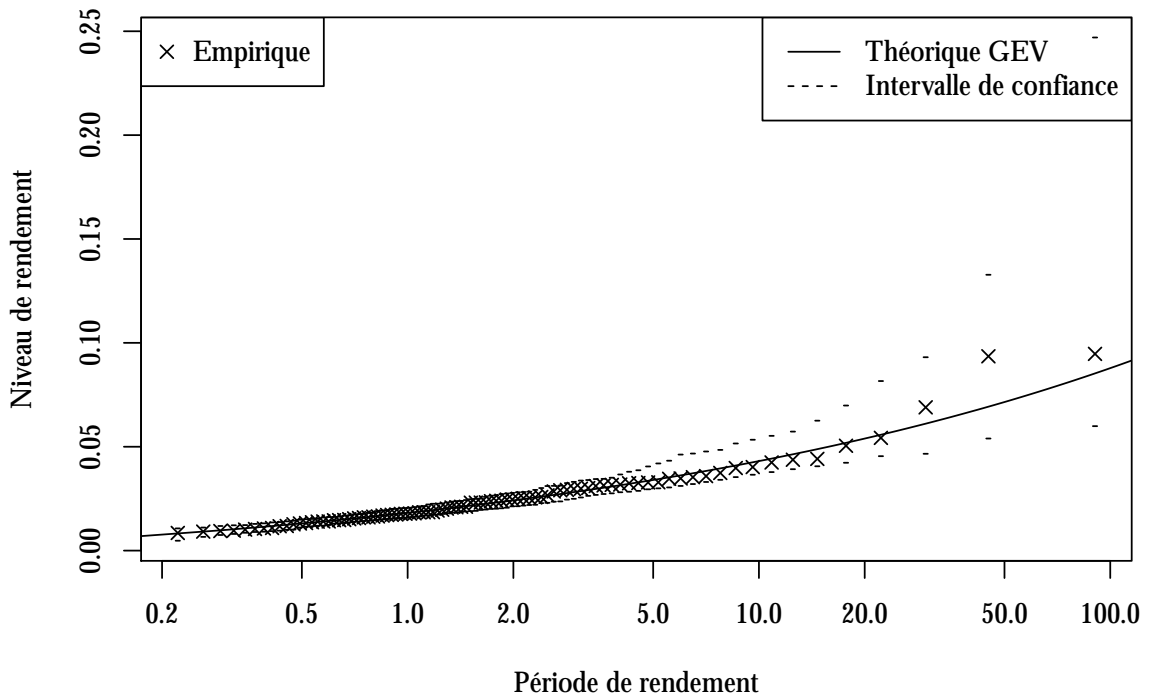
Graphique de comparaison des quantiles (QQ-plot)



Densité théorique GEV vs empirique des maxima



Graphique du niveau de rendement



Les graphiques ci-dessus permettent de constater que la distribution GEV estimée est assez proche de la

distribution empirique, ce qui nous donne donc une bonne approximation de la distribution des extrema du S&P500 sur 42 jours. On remarque que le paramètre ξ est estimé à 0,2539079, ce qui donne bien une distribution de Frechet comme nous l'attendions.

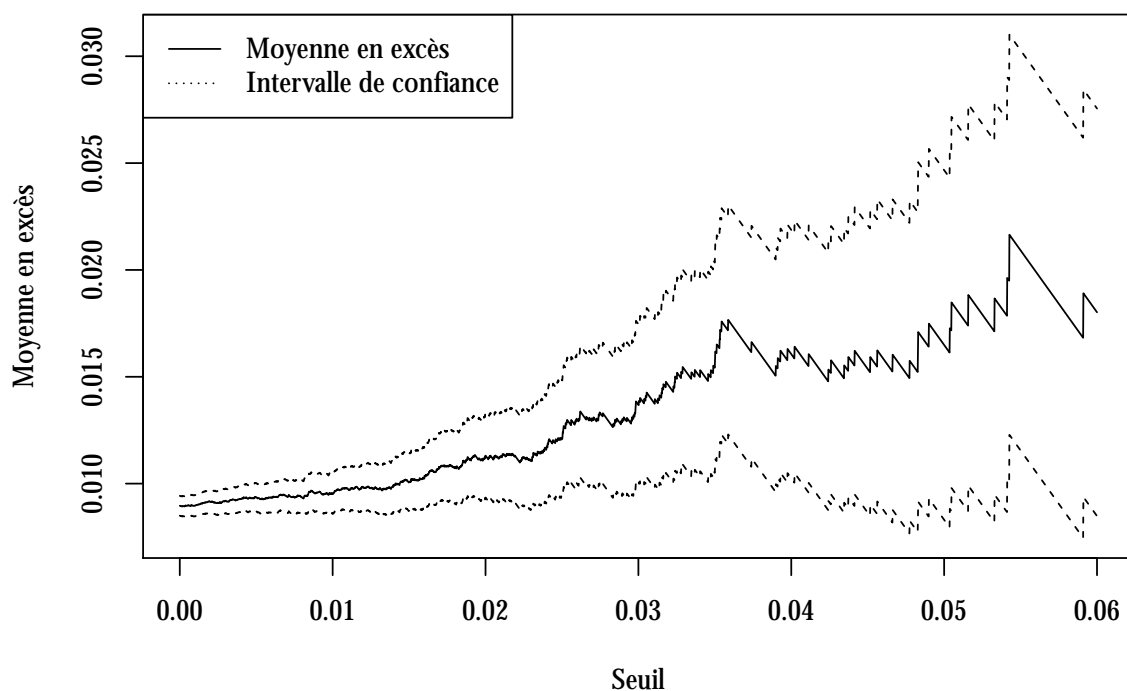
5.2. Méthode des peaks over treshold (POT)

Dans le cadre de la théorie des valeurs extrêmes, une autre méthode de modélisation est préférée à celle présentée ci-dessus. Elle modélise la distribution des données (pertes) au-dessus d'un certain seuil ("peaks-over-treshold" ou POT) et non plus les maxima sur une période donnée. L'avantage est de disposer de plus de données et donc d'une estimation plus précise. Pour estimer ces valeurs, au-dessus d'un seuil, c'est la distribution de Pareto généralisée qui est utilisée. On la note GPD en anglais ou DPG en français. Ceci requiert donc au préalable le choix d'un seuil noté u à partir duquel prendre en compte les données.

5.2.1. Choix du seuil u

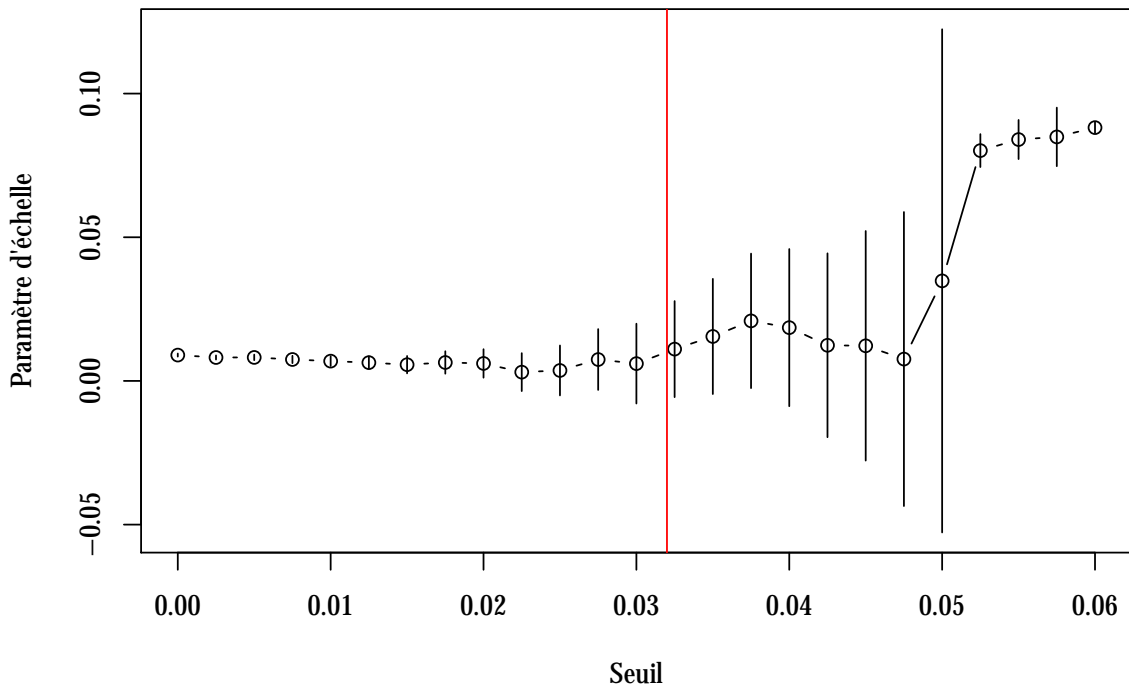
Recherchons le seuil u adéquat. Dans un premier temps traçons la fonction des excès en moyenne :

Graphique de la moyenne en excès

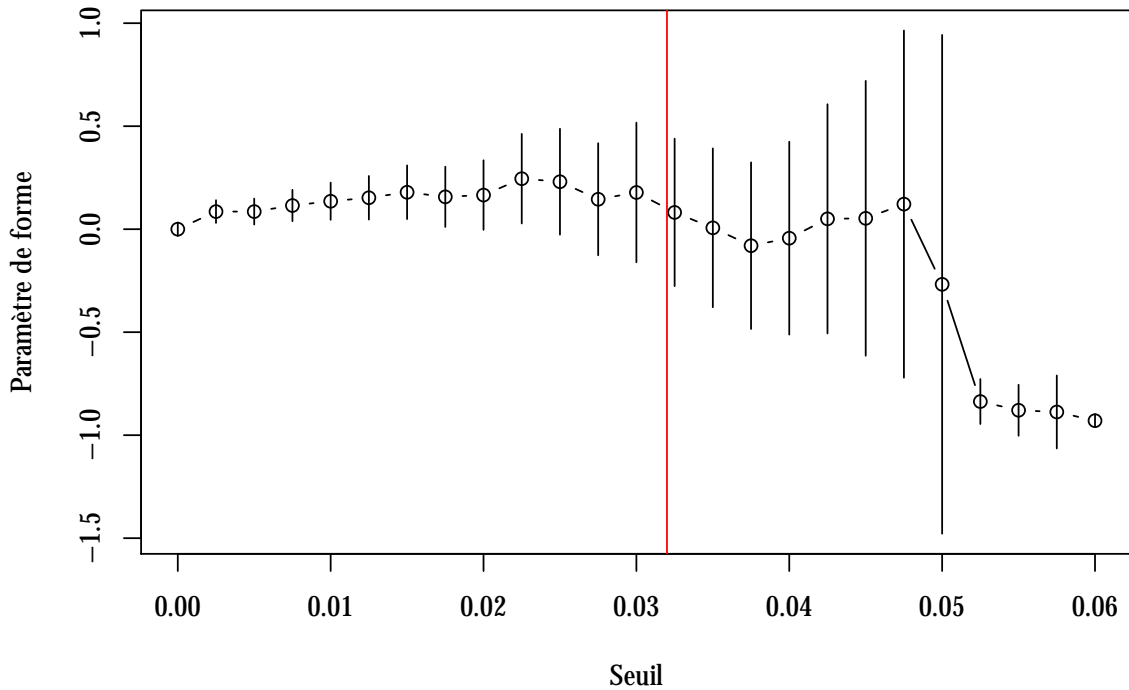


Pour nous aider, nous disposons également de la courbe de choix du seuil ("threshold choice plot") qui donne une estimation des paramètres de la loi de Pareto en fonction du seuil choisi (ξ le paramètre de forme et σ celui d'échelle) :

Paramètre d'échelle en fonction du seuil



Paramètre de forme en fonction du seuil



D'après les graphiques précédents nous choisissons un seuil u d'une valeur de 0,032 soit 3,2%. Nous

pouvons maintenant estimer les paramètres de la loi de Pareto qui correspond à la distribution des pertes au-delà de ce seuil.

5.2.2. Estimation des paramètres de la distribution de Pareto (DPG) : ξ et σ

```
##
## Call: fpot(x = loss_md, threshold = u)
## Deviance: -342.2858
##
## Threshold: 0.032
## Number Above: 53
## Proportion Above: 0.0141
##
## Estimates
##   scale      shape
## 1.457e-02  2.216e-13
##
## Standard Errors
##   scale      shape
## 0.003149  0.147559
##
## Optimization Information
##   Convergence: successful
##   Function Evaluations: 21
##   Gradient Evaluations: 1
```

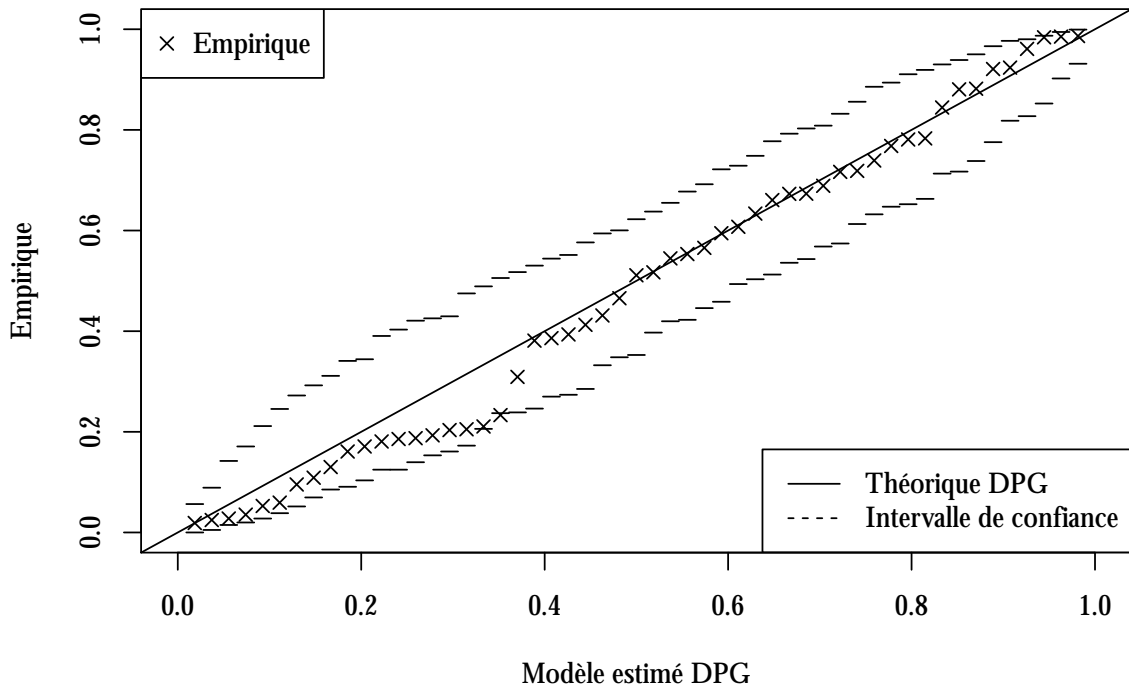
L'estimation des paramètres fournit les valeurs suivantes :

- Paramètre de forme $\xi = 2,216 \times 10^{-13} \approx 0$
- Paramètre d'échelle $\sigma = 0,01457$

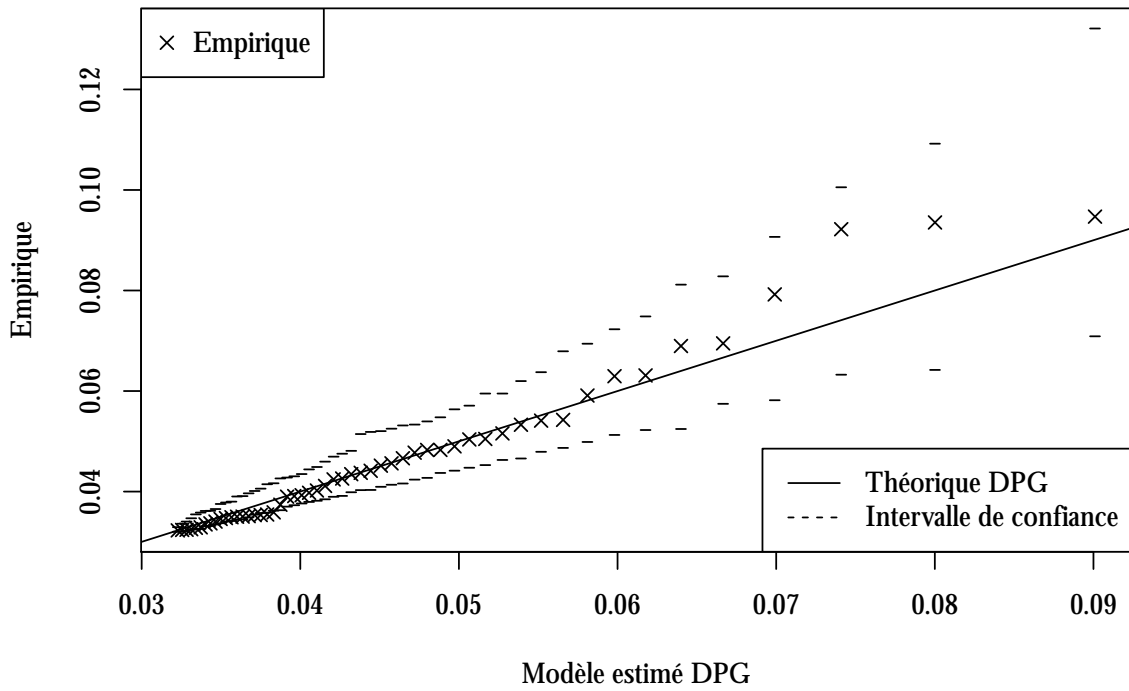
Il y a au total 53 observations au-dessus de ce seuil parmi les pertes historiques du S&P 500 de 2000 à 2015.

Voyons ce que ce choix de paramètre donne graphiquement :

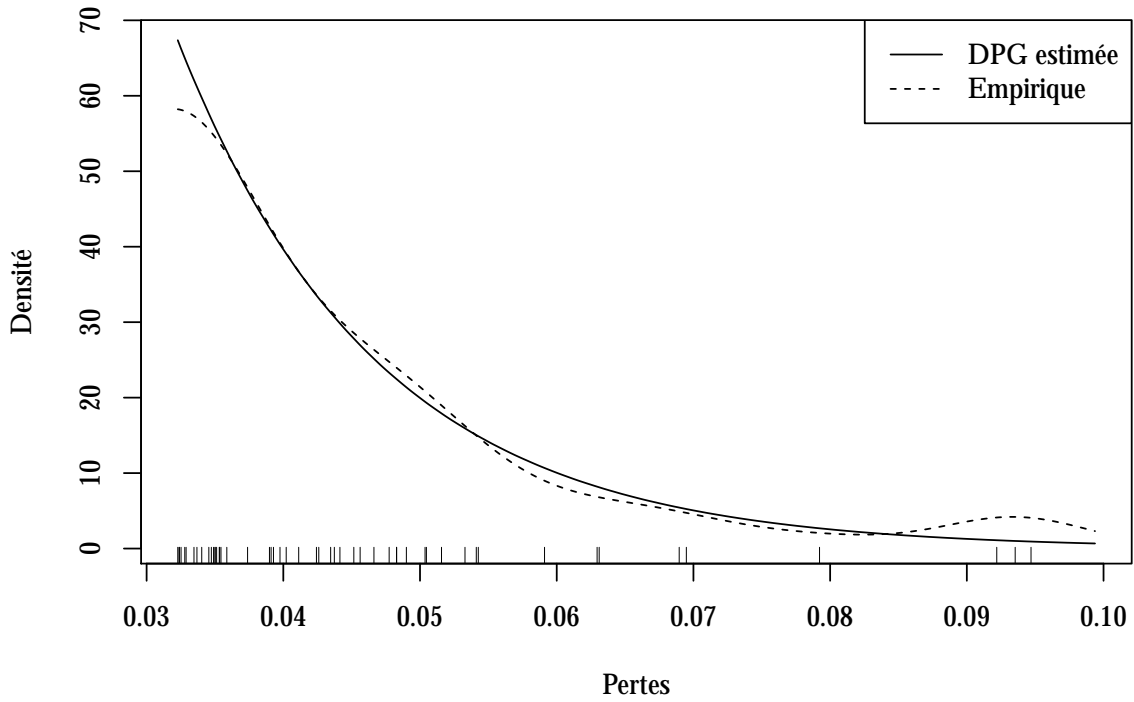
PP–plot pertes empiriques au-delà de 0,032 vs DPG



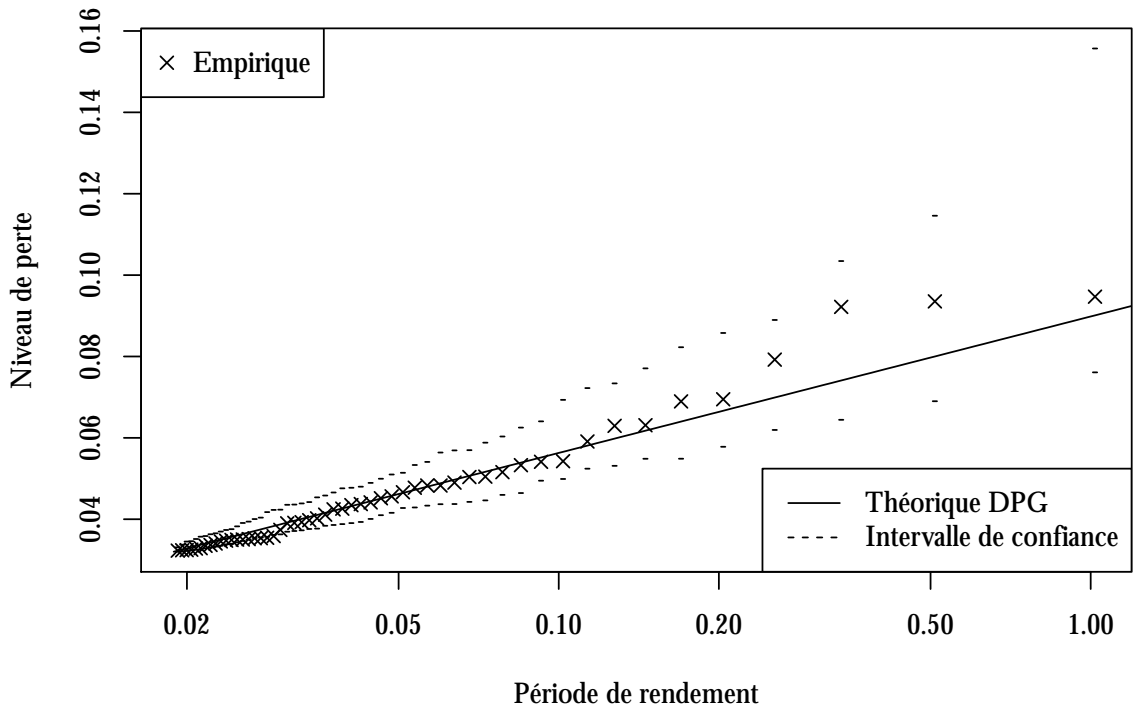
QQ–plot pertes empiriques au-delà de 0,032 vs DPG



Densité empirique vs théorique DPG



Pertes empiriques au-delà de 0,032 vs DPG



Le modèle obtenu semble plutôt bon car la densité de Pareto épouse mieux les données empiriques que

la GEV estimée par la méthode des maxima par blocs.

6. Obtention des rendements des dérivés sur la période de backtesting et des données nécessaires aux calculs de VaR

6.1. Calcul des rendements du future sur le S&P 500 avec maturité constante de 30 jours

Afin d'obtenir les prix du future hypothétique de maturité constante 30 jours, deux problèmes se posent :

- Les futures cotés ont des durées de vie courtes, il n'existe donc pas d'historique du prix d'un unique contrat sur 5 ans
- Le prix d'un future évolue à mesure qu'il approche de sa maturité, ce qui ne convient pas à notre étude avec une maturité constante

Le premier problème se résout assez simplement, il suffit de concaténer les différents contrats : lorsqu'un future arrive à échéance, on effectue le roll avec le future suivant. C'est ce que nous avons ici fait en récupérant des prix de futures continus qui consistent en trois séries de prix. La première contient le prix du future qui est toujours le premier à arriver à maturité en fonction de la date. La seconde le prix du future qui arrive en second à maturité et ainsi de suite.

Par exemple, si nous sommes le 17 Septembre 2020, alors les séries de prix notées ES1, ES2 et ES3 correspondent respectivement à :

- ES1 : contrat mûrant le vendredi 18 Septembre 2020
- ES2 : contrat mûrant le vendredi 18 Décembre 2020
- ES3 : contrat mûrant le vendredi 19 Mars 2021

Lorsque la date de l'échéance passe on a alors au 19 Septembre 2020 :

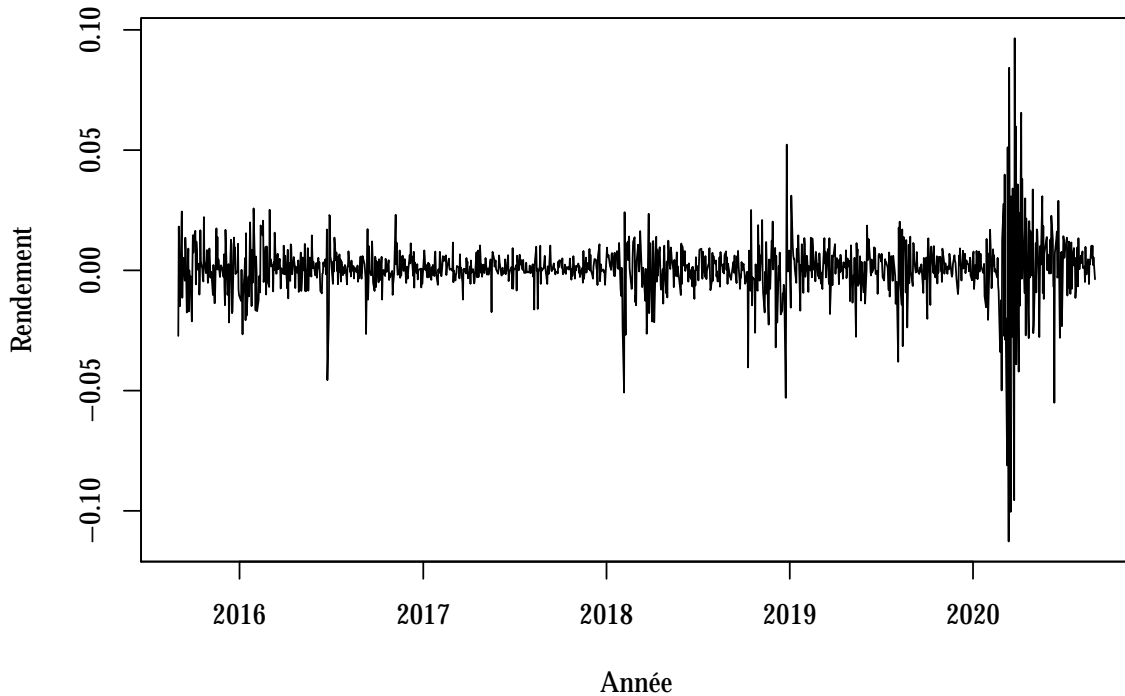
- ES1 : contrat mûrant le 18 Décembre 2020
- ES2 : contrat mûrant le 19 Mars 2021
- ES3 : contrat mûrant le 18 Juin 2021

Les contrats s'enchaînent ainsi au fil du temps dans les séries temporelles.

Pour répondre au second problème soulevé plus tôt, nous avons recours à une interpolation spline cubique utilisant les valeurs des 3 séries qui donnent les prix du future pour 3 temps à maturité différents. Par exemple au 17 Septembre, ES1 donne le prix du future avec une durée de vie de 1 jour, ES2 avec une durée de plus de trois mois etc. L'interpolation permet ainsi d'obtenir un prix de future à exactement 30 jours.

Affichons les rendements du future ainsi obtenu et les statistiques correspondantes :

Rendements du future S&P500 (2015–2020)



Tab. 10 : Statistiques des rendements du future (2015-2020)

	rdt
nobs	1262.000000
NAs	1.000000
Minimum	-0.112726
Maximum	0.096515
1. Quartile	-0.003091
3. Quartile	0.005433
Mean	0.000457
Median	0.000629
Sum	0.575874
SE Mean	0.000344
LCL Mean	-0.000219
UCL Mean	0.001132
Variance	0.000149
Stdev	0.012224
Skewness	-1.195391
Kurtosis	20.811772

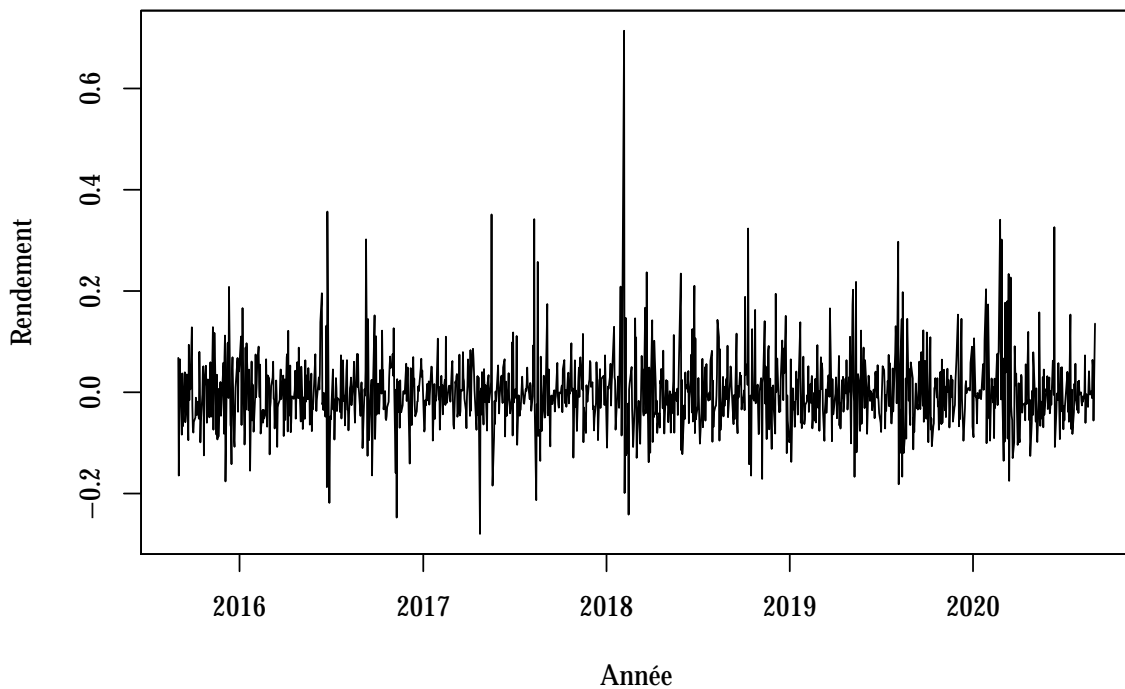
6.2. Calcul des rendements du call européen sur le S&P 500 à la monnaie de maturité constante de 30 jours

Les données historiques sur les options étant difficiles à obtenir, nous allons simplement en recalculer les prix historiques grâce à la formule de Black-Scholes. Le prix d'une option dépend de 5 paramètres : le prix spot du sous-jacent (S), le prix d'exercice (K), le taux sans risque (r), la volatilité du sous-jacent (σ), et le temps à maturité (T). Chaque jour nous utilisons :

- S = prix historique du S&P500 ($\hat{G}SPC$)
- $K = S$ car on choisit une option constamment à la monnaie (Call ATM)
- r = moyenne du taux historique du trésor américain à maturité constante de 1 mois (DGS1MO)
- σ = volatilité implicite à un mois donnée par le VIX
- $T = 30/365$

Nous importons donc les historiques du VIX en %, du taux DGS1MO en % et du prix du S&P500 (2015-2020). Ensuite nous calculons les prix et rendements quotidiens du call européen à la monnaie de maturité constante 30 jours. Nous affichons finalement les résultats :

Rendements du call S&P500 (2015–2020)



Tab. 11 : Statistiques des rendements du call (2015-2020)

	rdt
nobs	1262.000000
NAs	1.000000
Minimum	-0.279831
Maximum	0.714060
1. Quartile	-0.040892
3. Quartile	0.032755
Mean	0.000397
Median	-0.004519
Sum	0.501088
SE Mean	0.002078
LCL Mean	-0.003679
UCL Mean	0.004473
Variance	0.005443
Stdev	0.073777
Skewness	1.463771
Kurtosis	9.620168

7. Calcul de la Value-at-Risk (VaR)

7.1. Value-at-Risk paramétrique

7.1.1. VaR Delta-Normale (VaR-DN)

La Value-at-Risk Delta-Normale est fondée sur l'hypothèse que les rendements sont indépendants et qu'ils suivent une loi normale. Calculons la VaR Delta-Normale des dérivés en utilisant une volatilité RiskMetrics et une volatilité GARCH(1,1). Ci-dessous l'obtention des volatilités RiskMetrics et GARCH(1,1).

##		rm	garch
##	2015-08-31	0.012641000	0.01264100
##	2015-09-01	0.008737414	0.01231662
##	2015-09-02	0.029186615	0.01507010
##	2015-09-03	0.018973856	0.01530323
##	2015-09-04	0.004782707	0.01450034
##	2015-09-08	0.015023438	0.01461265

Calculons à présent les VaR Delta-Normales à 95% et 99% du future et de l'option avec les deux volatilités GARCH et RiskMetrics :

##		var.fut.rm.95	var.fut.rm.99	var.fut.garch.95	var.fut.garch.99
##	2015-08-31	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000
##	2015-09-01	-0.014302767	-0.02025726	-0.02019004	-0.02858375
##	2015-09-02	-0.047938709	-0.06782922	-0.02471910	-0.03498928
##	2015-09-03	-0.031140216	-0.04407079	-0.02510257	-0.03553163
##	2015-09-04	-0.007797853	-0.01105724	-0.02378194	-0.03366384
##	2015-09-08	-0.024642356	-0.03488074	-0.02396667	-0.03392511
##		var.opt.rm.95	var.opt.rm.99	var.opt.garch.95	var.opt.garch.99
##	2015-08-31	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000
##	2015-09-01	-0.007464425	-0.010571998	-0.01053691	-0.01491748
##	2015-09-02	-0.024911606	-0.035247816	-0.01284541	-0.01818237
##	2015-09-03	-0.016176407	-0.022893452	-0.01304003	-0.01845761
##	2015-09-04	-0.004057540	-0.005753531	-0.01237471	-0.01751666
##	2015-09-08	-0.012794362	-0.018110153	-0.01244355	-0.01761399

7.1.2. VaR de Cornish-Fisher (VaR-CF)

Calculons la VaR de Cornish-Fisher :

##	var.fut.rm.95	var.fut.rm.99	var.fut.garch.95	var.fut.garch.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.01430190	-0.02025577	-0.02018901	-0.02858183
## 2015-09-02	-0.04793692	-0.06782532	-0.02471795	-0.03498705
## 2015-09-03	-0.03113889	-0.04406809	-0.02510141	-0.03552936
## 2015-09-04	-0.00779717	-0.01105621	-0.02378082	-0.03366167
## 2015-09-08	-0.02464121	-0.03487851	-0.02396554	-0.03392293
##	var.opt.rm.95	var.opt.rm.99	var.opt.garch.95	var.opt.garch.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.007463975	-0.010571219	-0.01053638	-0.01491648
## 2015-09-02	-0.024910676	-0.035245791	-0.01284482	-0.01818121
## 2015-09-03	-0.016175718	-0.022892051	-0.01303943	-0.01845644
## 2015-09-04	-0.004057184	-0.005752996	-0.01237412	-0.01751553
## 2015-09-08	-0.012793766	-0.018108994	-0.01244296	-0.01761285

7.1.3. VaR avec la théorie des valeurs extrêmes

Dans le cadre de la théorie des valeurs extrêmes, nous avons proposé deux méthodologies de calcul de VaR. La première fondée sur la loi des maxima de pertes par blocs d'observations et la seconde sur la loi des pertes au-delà d'un seuil.

7.1.3.1. VaR par la méthode des blocs de maxima (VaR-BMM)

Nous avons vu dans la section dédiée à cette méthode que le choix du nombre de jours par bloc s'était porté sur 42 jours. Ainsi nous avons estimé les paramètres de la loi GEV qui correspondait au mieux à la loi de la perte maximale sur 42 jours. Utiliser le quantile au niveau α_{gev} de la loi GEV estimée fournit une VaR pour la perte maximale sur 42 jours au niveau α_{gev} . Toutefois il nous faut faire le lien entre la loi de la perte maximale sur 42 jours et celle des pertes à un jour (notre VaR classique). Pour cela on utilise la notion de temps de retour : c'est le temps moyen au bout duquel le portefeuille subit une perte extrême. Après quelques calculs on obtient les relations suivante :

$$\tau_{gev} = 1/(1 - \alpha_{gev})$$

$$\tau = n \times \tau_{gev}$$

$$\tau_{gev} = 1/(n(1 - \alpha))$$

$$\alpha_{gev} = 1 - n(1 - \alpha)$$

Avec τ_{gev} le temps de retour de la loi GEV, α_{gev} le quantile de la loi GEV, n le nombre de jours dans le bloc (42 ici) et α le quantile de la VaR à un jour recherchée. Nous obtenons alors le quantile de la loi GEV correspondant au niveau de VaR recherché. Toutefois, nous remarquons ici la limite de cette méthode puisque la VaR à 95% n'est pas calculable du fait du nombre de jours n trop élevé (le α_{gev} calculé avec la méthode précédente n'étant pas compris entre 0 et 1 dans le cas $\alpha = 0,95$). Nous ne calculerons donc que la VaR à 99% avec cette méthode.

Nous obtenons en appliquant les formules ci-dessus que le quantile $\alpha_{gev} = 0,58$ fournira la VaR à un jour au niveau $\alpha = 0,99$. Calculons maintenant cette VaR sur notre période (2015-2020) :

##	var.fut.99	var.opt.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.02338626	-0.01220498
## 2015-09-02	-0.02338626	-0.01215280
## 2015-09-03	-0.02338626	-0.01214846
## 2015-09-04	-0.02338626	-0.01216882
## 2015-09-08	-0.02338626	-0.01214220

Nous observons que dans le calcul de cette VaR, la volatilité conditionnelle n'est pas prise en compte. Nous obtenons donc une VaR constante sur la période pour le future et qui varie uniquement du fait du delta pour l'option. Un autre avantage non mentionné précédemment de la méthode des pics au-delà du seuil, c'est qu'elle permet une prise en compte de la volatilité conditionnelle grâce à la méthodologie de "Conditional Extreme Value Theory" développée par McNeil et Frey (2000).

7.1.3.2. VaR par la méthode des pics au-delà du seuil (VaR-POT)

Calculons la VaR des pertes au-dessus du seuil $u = 0,032$. Nous avons que sur l'échantillon, 53 pertes étaient au-dessus du seuil sur 3771 observations. Ce qui donne, d'après la formule d'estimation de la fonction des excès, les VaRs suivantes :

##	var.fut.rm.99	var.fut.garch.99	var.opt.rm.99	var.opt.garch.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.02209753	-0.03117805	-0.011532407	-0.01627141
## 2015-09-02	-0.07397755	-0.03816366	-0.038442832	-0.01983195
## 2015-09-03	-0.04806758	-0.03875512	-0.024969666	-0.02013212
## 2015-09-04	-0.01206436	-0.03671819	-0.006277575	-0.01910597
## 2015-09-08	-0.03804529	-0.03700312	-0.019753195	-0.01921210

7.2. Value-at-Risk par simulation et méthodes semi-paramétriques

7.2.1. VaR par simulation historique des facteurs de risque et "full-repricing" (VaR-H)

Dans cette section nous allons calculer la VaR par simulation historique sur une fenêtre roulante de 1 an. Nous allons procéder par simulation classique sans modification de l'historique (Bootstrapping ou autres). La méthode consiste à utiliser les variations historiques des facteurs de risque et à repricer les dérivés avec ces nouveaux paramètres. Dans un premier temps calculons une VaR historique univariée (on ne fait varier que le S&P500 et on ne modifie par les autres paramètres).

##	var.fut.95	var.fut.99	var.opt.95	var.opt.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.01492499	-0.02120407	-0.49643558	-0.6035490
## 2015-09-02	-0.01571830	-0.02558734	-0.30352902	-0.4968900
## 2015-09-03	-0.01571830	-0.02558734	-0.02018628	-0.1992150
## 2015-09-04	-0.01571830	-0.02558734	-0.70631723	-0.9102195
## 2015-09-08	-0.01583198	-0.02558734	-0.04718755	-0.2309335

Voyons ce qu'il advient de la VaR si l'on fait également varier la volatilité (VIX) :

##	var.fut.95	var.fut.99	var.opt.95	var.opt.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.0000000000
## 2015-09-01	-0.01492499	-0.02120407	-0.33427353	-0.4160765938
## 2015-09-02	-0.01571830	-0.02558734	-0.13061898	-0.2402013425
## 2015-09-03	-0.01571830	-0.02558734	0.12002719	0.0266744079
## 2015-09-04	-0.01571830	-0.02558734	-0.50522304	-0.6251409841
## 2015-09-08	-0.01583198	-0.02558734	0.09696997	0.0005414278

7.2.2. VaR par simulation Monte-Carlo des facteurs de risque et "full-repricing"

7.2.2.1. VaR par simulation Monte-Carlo univariée (VaR-MC-U)

Dans cette section nous allons calculer la VaR de deux manières différentes : en faisant varier le sous-jacent de manière normale et en faisant varier le sous-jacent d'après le meilleur modèle choisi précédemment (ARMA(3,3)-eGARCH(2,1)).

Ci-dessous la VaR Monte-Carlo normale (100000 simulations) :

```

##          var.fut.95  var.fut.99  var.opt.95  var.opt.99
## 2015-08-31  0.00000000  0.00000000  0.00000000  0.00000000
## 2015-09-01 -0.02021938 -0.02861316 -0.5865453  -0.7339616
## 2015-09-02 -0.02457446 -0.03501570 -0.4755918  -0.6897760
## 2015-09-03 -0.02516903 -0.03534549 -0.1904167  -0.3847046
## 2015-09-04 -0.02365619 -0.03363774 -0.8687136  -1.0823523
## 2015-09-08 -0.02394238 -0.03396297 -0.1982590  -0.3955170

```

Voyons maintenant ce que donne la VaR Monte-Carlo avec le modèle des rendements du S&P500 choisi auparavant (ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) avec innovations suivant la loi sged) :

```

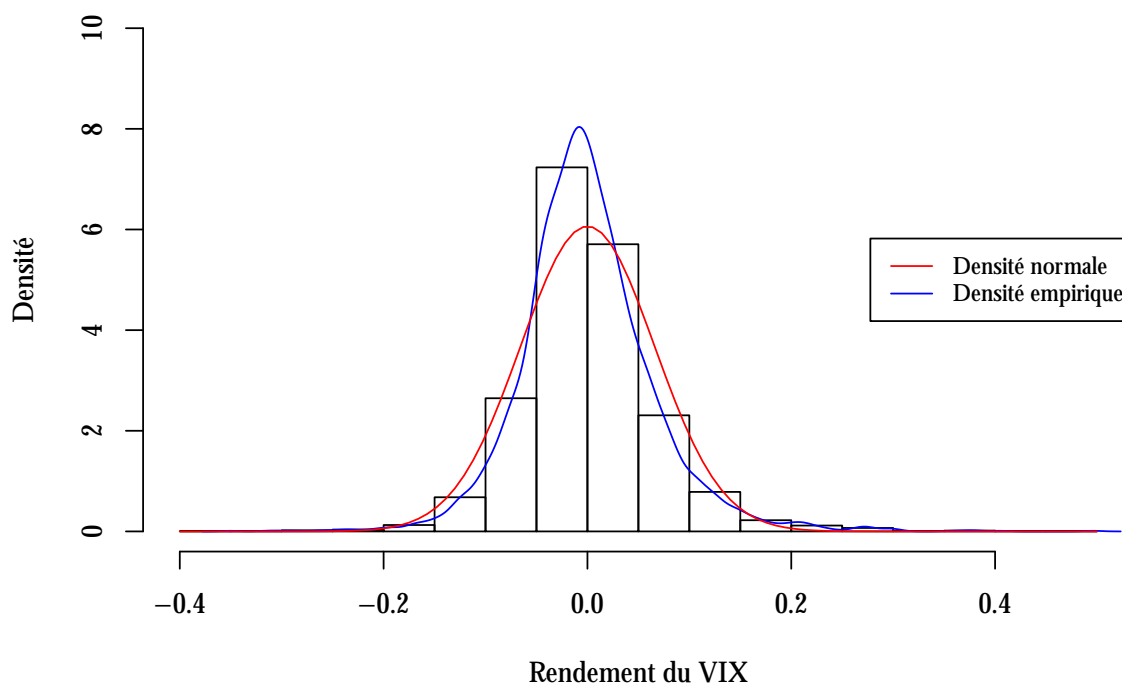
##          var.fut.95  var.fut.99  var.opt.95  var.opt.99
## 2015-08-31  0.00000000  0.00000000  0.00000000  0.00000000
## 2015-09-01 -0.01288608 -0.02358694 -0.46231301 -0.6450128
## 2015-09-02 -0.02144913 -0.03536745 -0.41387601 -0.6972093
## 2015-09-03 -0.05221536 -0.06469401 -0.73301183 -1.0126723
## 2015-09-04 -0.01321531 -0.02652667 -0.65644081 -0.9290666
## 2015-09-08 -0.01501227 -0.02895083 -0.03232365 -0.2953624

```

7.2.2.2. VaR par simulation Monte-Carlo bivariée (VaR-MC-BV)

La variation du prix de l'option est le fait de deux principaux facteurs de risque, le sous-jacent et la volatilité. C'est pourquoi nous allons calculer la VaR lorsque ces deux facteurs varient conjointement. Pour commencer nous allons supposer que les log-rendements du VIX varient de manière normale. Ceci peut être plus ou moins constaté ci-dessous avec la comparaison des rendements du VIX et de la densité normale correspondante :

Histogramme des rendements du VIX (2000–2015)

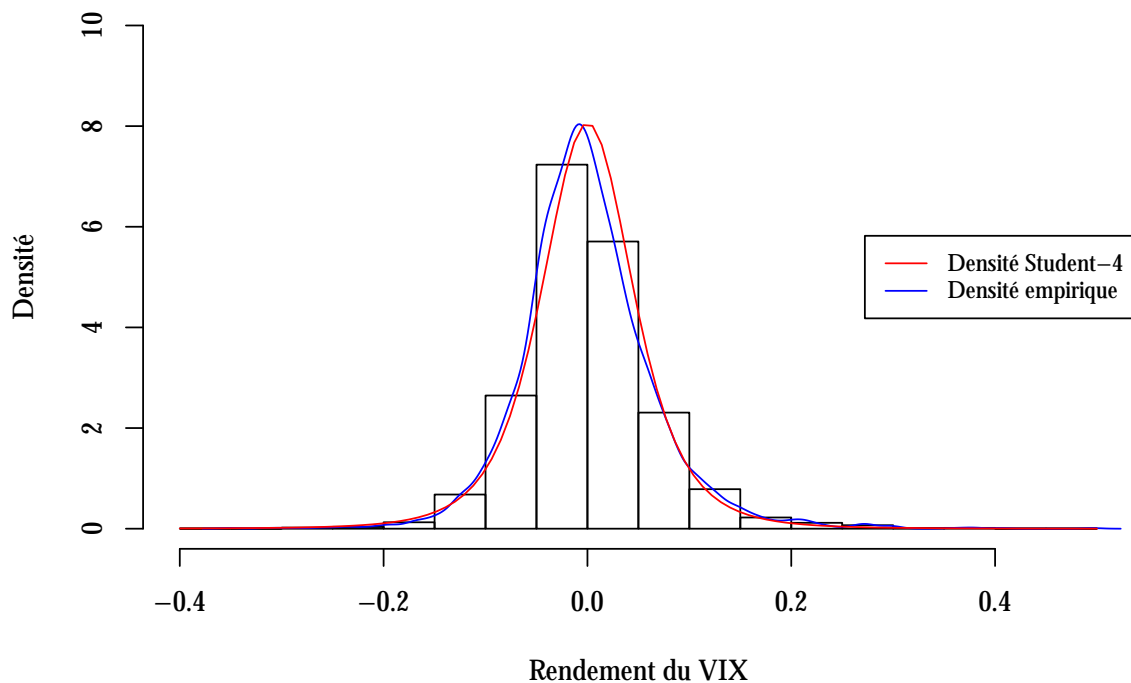


Les deux ne variant pas indépendamment, nous prendrons en compte la matrice de variance-covariance permettant de simuler l'évolution des facteurs simultanément. Ci-dessous, la VaR Monte-Carlo normale bivariée :

```
##          var.fut.95  var.fut.99  var.opt.95  var.opt.99
## 2015-08-31  0.00000000  0.00000000  0.00000000  0.00000000
## 2015-09-01 -0.02071029 -0.02931800 -0.48968190 -0.5923256
## 2015-09-02 -0.02081227 -0.02952715 -0.30299342 -0.4231748
## 2015-09-03 -0.02065128 -0.02934887 -0.03029003 -0.1450047
## 2015-09-04 -0.02070193 -0.02919994 -0.68498774 -0.8036863
## 2015-09-08 -0.02079178 -0.02948557 -0.05716696 -0.1774778
```

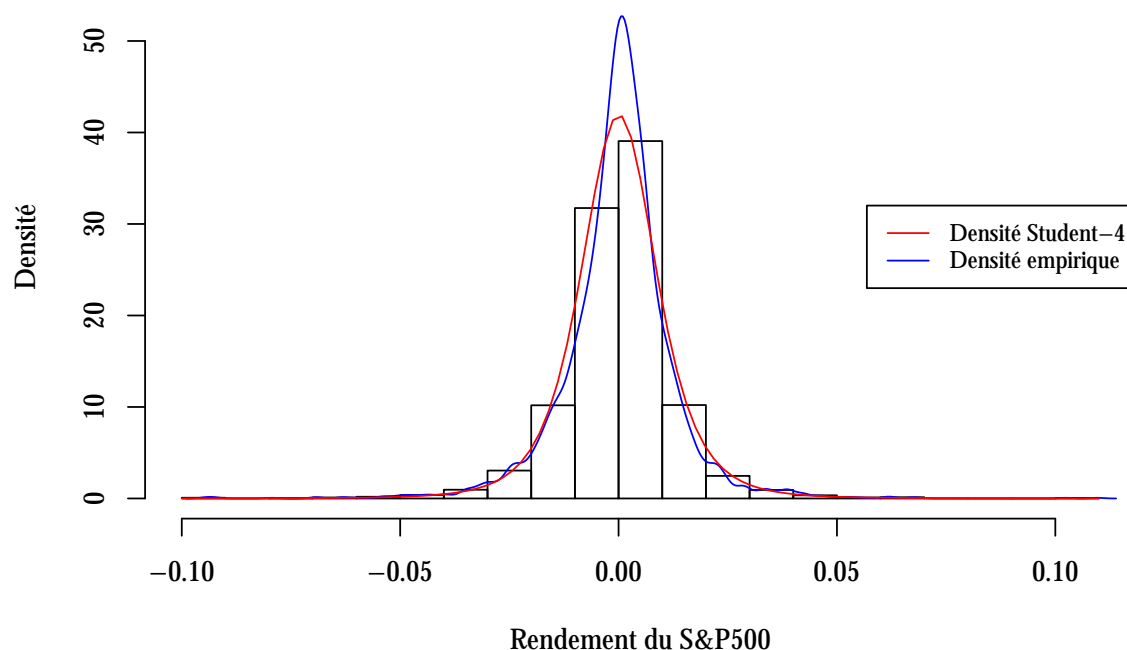
Nous voyons ci-dessus que la loi normale semble sous-estimer les queues de la distribution des rendements du VIX, ce qui est aussi le cas avec celle des rendements du S&P500. Nous allons donc calculer une VaR bivariée avec deux lois de Student-t. Voyons ci-dessous le degré de liberté le mieux adapté :

Histogramme des rendements du VIX (2000–2015)



Ci-dessus la comparaison de la densité empirique et Student-4 avec même moyenne et variance. On observe que cela semble mieux fitter que la loi normale. Voyons ce qu'il en est pour les rendements du S&P500 et la loi Student-4 :

Histogramme des rendements du S&P500 (2000–2015)



Cela n'est pas parfait mais nous nous en contenterons car les degrés de liberté des deux lois doivent être les mêmes pour la simulation. Voyons le niveau de risque fournit par la VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée :

```
##          var.fut.95  var.fut.99  var.opt.95  var.opt.99
## 2015-08-31  0.00000000  0.00000000  0.00000000  0.00000000
## 2015-09-01 -0.02686974 -0.04772873 -0.5538258 -0.7765317
## 2015-09-02 -0.02682001 -0.04704289 -0.3803103 -0.6539470
## 2015-09-03 -0.02699302 -0.04749778 -0.1098986 -0.3724204
## 2015-09-04 -0.02699614 -0.04755646 -0.7657831 -1.0417836
## 2015-09-08 -0.02674122 -0.04669102 -0.1349147 -0.4092149
```

8. Calcul de la Tail Conditional Expectation (TCE)

Dans cette section, nous allons calculer la Tail Conditional Expectation en fonction des différents modèles de VaR. Les résultats sont donnés à titre indicatif, aucune étude statistique ne sera réalisée.

8.1. Tail Conditional Expectation paramétriques

8.1.1. TCE delta-normale (TCE-DN)

```
##          tce.fut.rm.95  tce.fut.rm.99  tce.fut.garch.95  tce.fut.garch.99
## 2015-08-31  0.00000000  0.00000000  0.00000000  0.00000000
## 2015-09-01 -0.017953775 -0.02321808  -0.02533665  -0.03275743
## 2015-09-02 -0.060134604 -0.07771958  -0.03101628  -0.04009603
## 2015-09-03 -0.039068616 -0.05050039  -0.03149716  -0.04071738
## 2015-09-04 -0.009796352 -0.01267794  -0.02984104  -0.03857752
## 2015-09-08 -0.030920038 -0.03997168  -0.03007270  -0.03887684
```

##	tce.opt.rm.95	tce.opt.rm.99	tce.opt.garch.95	tce.opt.garch.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.009369838	-0.012117209	-0.01322286	-0.01709567
## 2015-09-02	-0.031249268	-0.040387395	-0.01611777	-0.02083612
## 2015-09-03	-0.020294973	-0.026233437	-0.01636183	-0.02115146
## 2015-09-04	-0.005097440	-0.006596847	-0.01552751	-0.02007345
## 2015-09-08	-0.016053747	-0.020753378	-0.01561381	-0.02018494

8.1.2. TCE de Cornish-Fisher (TCE-CF)

##	tce.fut.rm.95	tce.fut.rm.99	tce.fut.garch.95	tce.fut.garch.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.018106447	-0.02322535	-0.02495793	-0.03260779
## 2015-09-02	-0.060352076	-0.07645742	-0.03159356	-0.03952550
## 2015-09-03	-0.039105430	-0.05142512	-0.03149002	-0.04134840
## 2015-09-04	-0.009864566	-0.01256263	-0.02998795	-0.03921011
## 2015-09-08	-0.030818607	-0.04048057	-0.03035542	-0.03942414

##	tce.opt.rm.95	tce.opt.rm.99	tce.opt.garch.95	tce.opt.garch.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.009449515	-0.012121002	-0.01302521	-0.01701757
## 2015-09-02	-0.031362279	-0.039731508	-0.01641776	-0.02053964
## 2015-09-03	-0.020314097	-0.026713806	-0.01635812	-0.02147925
## 2015-09-04	-0.005132934	-0.006536848	-0.01560395	-0.02040261
## 2015-09-08	-0.016001084	-0.021017593	-0.01576060	-0.02046910

8.1.3. TCE avec la théorie des valeurs extrêmes

8.1.3.1. TCE par la méthode des blocs de maxima (TCE-BMM)

##	tce.fut.99	tce.opt.99
## 2015-08-31	0.000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.037614	-0.01963025
## 2015-09-02	-0.037614	-0.01954632
## 2015-09-03	-0.037614	-0.01953934
## 2015-09-04	-0.037614	-0.01957209
## 2015-09-08	-0.037614	-0.01952927

8.1.3.2. TCE par la méthode des pics au-delà du seuil (TCE-POT)

##	tce.fut.rm.99	tce.fut.garch.99	tce.opt.rm.99	tce.opt.garch.99
## 2015-08-31	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
## 2015-09-01	-0.02229602	-0.03145786	-0.01163600	-0.01641744
## 2015-09-02	-0.07464062	-0.03850603	-0.038787397	-0.02000986
## 2015-09-03	-0.04849863	-0.03910278	-0.025193584	-0.02031272
## 2015-09-04	-0.01217301	-0.03704761	-0.006334112	-0.01927738
## 2015-09-08	-0.03838660	-0.03733509	-0.019930400	-0.01938446

8.2. Tail Conditional Expectation par simulation et semi-paramétriques

8.2.1. TCE par simulation historique des facteurs de risque et “full-repricing” (TCE-H)

Ci-dessous, la TCE par simulation historique univariée.

```
##          tce.fut.95  tce.fut.99 tce.opt.95 tce.opt.99
## 2015-08-31 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
## 2015-09-01 -0.02070759 -0.03130222 -0.5969759 -0.7848223
## 2015-09-02 -0.02184459 -0.03420111 -0.4246195 -0.6737173
## 2015-09-03 -0.02184459 -0.03420111 -0.1323587 -0.3633561
## 2015-09-04 -0.02184459 -0.03420111 -0.8338840 -1.0957556
## 2015-09-08 -0.02184459 -0.03420111 -0.1615753 -0.4015029
```

Ensuite, celle par simulation historique multivariée.

```
##          tce.fut.95  tce.fut.99 tce.opt.95 tce.opt.99
## 2015-08-31 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
## 2015-09-01 -0.02070759 -0.03130222 -0.39588745 -0.51441934
## 2015-09-02 -0.02184459 -0.03420111 -0.21568886 -0.36738551
## 2015-09-03 -0.02184459 -0.03420111 0.04493656 -0.08055803
## 2015-09-04 -0.02184459 -0.03420111 -0.59565709 -0.77176111
## 2015-09-08 -0.02184459 -0.03420111 0.01689859 -0.10792735
```

8.2.2. TCE par simulation Monte-Carlo des facteurs de risque et “full-repricing”

8.2.2.1. TCE par simulation Monte-Carlo univarié (TCE-MC-U)

Dans un premier temps intéressons nous à la TCE par simulation Monte-Carlo univariée normale :

```
##          tce.fut.95  tce.fut.99 tce.opt.95 tce.opt.99
## 2015-08-31 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
## 2015-09-01 -0.02536109 -0.03277002 -0.6770204 -0.8096662
## 2015-09-02 -0.03093346 -0.04020187 -0.6064329 -0.8022073
## 2015-09-03 -0.03147478 -0.04057971 -0.3112286 -0.4905764
## 2015-09-04 -0.02974632 -0.03855671 -0.9993879 -1.1927428
## 2015-09-08 -0.03009665 -0.03894127 -0.3197802 -0.4992949
```

Puis à la TCE Monte-Carlo univariée ARMA-eGARCH sged :

```
##          tce.fut.95  tce.fut.99 tce.opt.95 tce.opt.99
## 2015-08-31 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
## 2015-09-01 -0.02001973 -0.03084520 -0.5848639 -0.7757104
## 2015-09-02 -0.02995562 -0.04290124 -0.5880447 -0.8626504
## 2015-09-03 -0.06007873 -0.07201775 -0.9104326 -1.1891109
## 2015-09-04 -0.02110473 -0.03339339 -0.8187323 -1.0791233
## 2015-09-08 -0.02367844 -0.03659888 -0.1969975 -0.4524987
```

8.2.2.2. TCE par simulation Monte-Carlo bivariée (TCE-MC-BV)

Commençons par le calcul de la TCE Monte-Carlo bivariée normale.

```
##          tce.fut.95  tce.fut.99 tce.opt.95 tce.opt.99
## 2015-08-31 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
## 2015-09-01 -0.02598106 -0.03350749 -0.5523884 -0.6429623
## 2015-09-02 -0.02610219 -0.03380070 -0.3763507 -0.4808794
## 2015-09-03 -0.02592096 -0.03362785 -0.1005346 -0.2036172
## 2015-09-04 -0.02590907 -0.03355871 -0.7584516 -0.8653441
## 2015-09-08 -0.02609674 -0.03375176 -0.1307118 -0.2374656
```

La TCE Monte-Carlo bivariée Student-4 donne quant à elle les résultats suivants :

```

##          tce.fut.95  tce.fut.99  tce.opt.95  tce.opt.99
## 2015-08-31 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
## 2015-09-01 -0.04044948 -0.06645471 -0.7051342 -0.9929027
## 2015-09-02 -0.04005449 -0.06438630 -0.5610722 -0.9016657
## 2015-09-03 -0.04047919 -0.06620562 -0.2856073 -0.6192313
## 2015-09-04 -0.04077692 -0.06678186 -0.9497332 -1.3031403
## 2015-09-08 -0.04022544 -0.06580695 -0.3208153 -0.6809800

```

9. Backtesting de la Value-at-Risk

Dans cette section nous nous concentrerons sur la performance des mesures de VaR. L'étude se scinde en trois parties : la performance de la VaR par rapport au S&P500, celle par rapport au future et finalement celle par rapport à l'option européenne.

9.1. Performance de la VaR du S&P500

9.1.1. VaRs à 95%

Voyons les résultats des différents tests statistiques sur les mesures de VaR entre 2015 et 2020 :

Tab. 12 : Tests statistiques sur les VaRs du S&P500 à 95% (2015-2020)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	13 %	164	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	3.7 %	46	Vert	Non	Non
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	13 %	164	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	3.7 %	46	Vert	Non	Non
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	6.7 %	85	Jaune	Non	Non

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

La volatilité GARCH semble être le facteur déterminant à ce niveau de précision. Toutes les mesures avec volatilité RiskMetrics ne sont pas assez extrêmes et ont donc une fréquence de dépassement trop importante. Au niveau des tests de Kupiec et de Christoffersen, les résultats sont très mauvais. Étant donné que les modèles n'ont pas été recalibrés, ce qui est le cas dans la réalité puisque les banques revoient les paramètres de leurs modèles, voyons ce qu'il en est du backtesting sur 3 ans seulement.

Tab. 13 : Tests statistiques sur les VaRs du S&P500 à 95% (2015-2018)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	12.7 %	96	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	2.9 %	22	Vert	Non	Non
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	12.7 %	96	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	2.9 %	22	Vert	Non	Non
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	5.8 %	44	Vert	Oui	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Les résultats sont bien meilleurs. La mesure de VaR ARMA-eGARCH est la seule qui réussit l'ensemble des tests. Les mesures Delta-normale et Cornish-Fisher avec volatilité GARCH sont trop conservatrices et échouent donc au test de Kupiec (et de Christoffersen).

9.1.2. VaRs à 99%

Comme ci-dessus, voyons les résultats pour les VaRs à 99% sur la période de 2015 à 2020 :

Tab. 14 : Tests statistiques sur les VaRs du S&P500 à 99% (2015-2020)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	9.1 %	115	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	2.4 %	30	Rouge	Non	Non
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	9.1 %	115	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	2.4 %	30	Rouge	Non	Non
VaR Maxima par blocs	2.9 %	37	Rouge	Non	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité RiskMetrics	8.3 %	105	Rouge	Non	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité GARCH(1,1)	2 %	25	Jaune	Non	Non
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	2.5 %	31	Rouge	Non	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Encore une fois les résultats sont mauvais, aucune mesure ne convient. Voyons ce qu'il en est sur 3 ans :

Tab. 15 : Tests statistiques sur les VaRs du S&P500 à 99% (2015-2018)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	9.8 %	74	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	1.6 %	12	Jaune	Oui	Non
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	9.8 %	74	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	1.6 %	12	Jaune	Oui	Non
VaR Maxima par blocs	1.1 %	8	Vert	Oui	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité RiskMetrics	8.9 %	67	Rouge	Non	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité GARCH(1,1)	1.1 %	8	Vert	Oui	Non
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	1.6 %	12	Jaune	Oui	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Sur trois ans, on observe que les mesures issues de la théorie des valeurs extrêmes performant le mieux, ce qui est rassurant car c'est justement leur rôle : prévoir les événements extrêmes ce qui correspond au niveau de confiance à 99%. Cependant la mesure par maxima par blocs ne représente absolument pas le risque quotidien car elle est constante et ne permettrait donc pas en réalité à une banque d'ajuster son niveau de capital servant à couvrir ses risques. Les mesures les plus performantes sont finalement, selon ces critères, la VaR ARMA-eGARCH et la VaR-POT à volatilité GARCH. Toutefois la VaR POT ne réussit pas le test de Christoffersen, on considèrera que la meilleure mesure est la VaR ARMA-eGARCH.

9.2. Performance de la VaR du future sur le S&P500

9.2.1. VaRs à 95%

Tab. 16 : Tests statistiques sur les VaRs du future sur le S&P500 à 95% (2015-2020)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	13.7 %	173	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	4.1 %	52	Vert	Oui	Non
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	13.7 %	173	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	4.1 %	52	Vert	Oui	Non
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	6.7 %	85	Jaune	Non	Non
VaRs par simulation et repricing					
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged repricing	6.7 %	85	Jaune	Non	Non
VaR Historique univariée	5.6 %	70	Vert	Oui	Non
VaR Historique bivariée	5.6 %	70	Vert	Oui	Non
VaR Monte-Carlo normale univariée	4.1 %	52	Vert	Oui	Non
VaR Monte-Carlo normale bivariée	3.5 %	44	Vert	Non	Non
VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée	2.1 %	26	Vert	Non	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Toutes les méthodes de simulation donnent des VaRs performantes du point de vue du Traffic Light Test, mais aucune des mesures ne réussit le test de Kupiec et celui de Christoffersen. Voyons ce qu'il en est sur 3 ans :

Tab. 17 : Tests statistiques sur les VaRs du future sur le S&P500 à 95% (2015-2018)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	12.9 %	98	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	3 %	23	Vert	Non	Non
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	12.9 %	98	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	3 %	23	Vert	Non	Non
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	5.5 %	42	Vert	Oui	Oui
VaRs par simulation et repricing					
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged repricing	5.5 %	42	Vert	Oui	Oui
VaR Historique univariée	5.2 %	39	Vert	Oui	Non
VaR Historique bivariée	5.2 %	39	Vert	Oui	Non
VaR Monte-Carlo normale univariée	3 %	23	Vert	Non	Non
VaR Monte-Carlo normale bivariée	1.6 %	12	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée	0.3 %	2	Vert	Non	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Sur cette période, hormis les mesures à volatilité RiskMetrics, toutes obtiennent un bon résultat au Traffic Light Test. En revanche, seule la VaR ARMA-eGARCH passe les tests de Kupiec et Christoffersen. C'est donc à nouveau la mesure de risque la plus performante. On remarque qu'avec repricing ou non les performances de ce modèle sont les mêmes. Ainsi les mesures paramétriques ou semi-paramétriques sans repricing peuvent être un bon choix pour les futures. Les VaRs par Monte-Carlo étant trop conservatrices elles échouent au test de Kupiec, tandis que les VaRs historiques, ne suivant pas les tendances réelles du marché au jour le jour, échouent au test de Christoffersen car les dépassements ne sont pas indépendants. Finalement, les VaRs paramétriques à volatilité GARCH sont trop conservatrices et elles échouent donc logiquement au test de Kupiec. On conclut donc que le meilleur modèle à 95% pour le future est le modèle ARMA-eGARCH sans repricing (car plus simple et aussi performant que son homologue avec repricing).

9.2.1. VaRs à 99%

Tab. 18 : Tests statistiques sur les VaRs du future sur le S&P500 à 99% (2015-2020)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	10 %	126	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	2.1 %	27	Jaune	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	10 %	126	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	2.1 %	27	Jaune	Non	Oui
VaR Maxima par blocs	2.7 %	34	Rouge	Non	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité RiskMetrics	9.5 %	120	Rouge	Non	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité GARCH(1,1)	2 %	25	Jaune	Non	Oui
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	2.1 %	27	Jaune	Non	Oui
VaRs par simulation et repricing					
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged repricing	2.1 %	27	Jaune	Non	Oui
VaR Historique univariée	1.7 %	21	Jaune	Oui	Non
VaR Historique bivariée	1.7 %	21	Jaune	Oui	Non
VaR Monte-Carlo normale univariée	2.1 %	27	Jaune	Non	Oui
VaR Monte-Carlo normale bivariée	1.3 %	17	Vert	Oui	Oui
VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée	0.7 %	9	Vert	Oui	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Les résultats sont encore une fois plutôt mauvais à l'exception des VaRs par simulation de Monte-Carlo bivariée. Voyons ce qu'il en est sur 3 ans :

Tab. 19 : Tests statistiques sur les VaRs du future sur le S&P500 à 99% (2015-2018)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	9.9 %	75	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	1.3 %	10	Vert	Oui	Non
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	9.9 %	75	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	1.3 %	10	Vert	Oui	Non
VaR Maxima par blocs	0.9 %	7	Vert	Oui	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité RiskMetrics	9.5 %	72	Rouge	Non	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité GARCH(1,1)	1.2 %	9	Vert	Oui	Non
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	1.3 %	10	Vert	Oui	Oui
VaRs par simulation et repricing					
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged repricing	1.3 %	10	Vert	Oui	Oui
VaR Historique univariée	1.2 %	9	Vert	Oui	Oui
VaR Historique bivariée	1.2 %	9	Vert	Oui	Oui
VaR Monte-Carlo normale univariée	1.3 %	10	Vert	Oui	Non
VaR Monte-Carlo normale bivariée	0.3 %	2	Vert	Oui	Oui
VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée	0.1 %	1	Vert	Non	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Parmi les méthodes paramétriques et semi-paramétriques, la VaR par maxima par blocs et la VaR ARMA-eGARCH passent l'ensemble des tests. Cependant, la première est constante sur la période et ne reflète donc pas les besoins de couverture d'une banque. Elle ne sera donc pas retenue. Cinq VaRs sont satisfaisantes selon nos critères :

- VaR ARMA-eGARCH sans repricing
- VaR ARMA-eGARCH avec repricing
- VaR Historique univariée

- VaR Historique bivariée
- VaR Monte-Carlo normale bivariée

Seules les VaRs univariées font sens dans le cadre du future car intégrer la corrélation entre les variations du S&P500 et du VIX n'est pas nécessaire pour ce produit. On préférera donc les méthodes univariées. Ceci fournit finalement trois VaRs satisfaisantes, la VaR ARMA-eGARCH avec et sans repricing et la VaR Historique univariée. Nous retiendrons donc que les deux meilleures mesures sont la VaR ARMA-eGARCH sans repricing (plus simple que celle avec) et la VaR Historique univariée.

9.2. Performance de la VaR de l'option européenne sur le S&P500

9.2.1. VaRs à 95%

Tab. 20 : Tests statistiques sur les VaRs de l'option sur le S&P500 à 95% (2015-2020)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	49.1 %	619	Rouge	Non	Non applicable
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	47.4 %	597	Rouge	Non	Non applicable
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	49.1 %	619	Rouge	Non	Non applicable
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	47.4 %	597	Rouge	Non	Non applicable
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	46.7 %	589	Rouge	Non	Non applicable
VaRs par simulation et repricing					
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged repricing	1.1 %	14	Vert	Non	Oui
VaR Historique univariée	0.6 %	7	Vert	Non	Non
VaR Historique bivariée	1.1 %	14	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo normale univariée	0.1 %	1	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo normale bivariée	0.6 %	7	Vert	Non	Non
VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée	0.5 %	6	Vert	Non	Non

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Il apparaît de manière évidente que les mesures paramétriques et semi-paramétriques sans repricing sont totalement inadaptées à l'option. Si les autres mesures réussissent le Traffic Light Test car très conservatrices, aucune ne passe les deux autres avec succès. Fait intéressant, les mesures bivariées performant mieux que leurs homologues univariées avec, à chaque fois, un pourcentage de dépassement plus proche de 5%. Nous retiendrons ici les mesures de VaR ARMA-eGARCH avec repricing et de VaR Historique bivariée.

Sur 3 ans :

Tab. 21 : Tests statistiques sur les VaRs de l'option sur le S&P500 à 95% (2015-2018)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	49.5 %	375	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	48.1 %	364	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	49.5 %	375	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	48.1 %	364	Rouge	Non	Oui
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	47 %	356	Rouge	Non	Oui
VaRs par simulation et repricing					
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged repricing	1.1 %	8	Vert	Non	Oui
VaR Historique univariée	0.4 %	3	Vert	Non	Oui
VaR Historique bivariée	0.9 %	7	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo normale univariée	0.1 %	1	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo normale bivariée	0.1 %	1	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée	0.1 %	1	Vert	Non	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

On réalise ici le même constat que précédemment avec en prime un avantage pour la VaR ARMA-eGARCH avec repricing qui performe un peu mieux que l'Historique bivariée.

9.2.1. VaRs à 99%

Tab. 22 : Tests statistiques sur les VaRs de l'option sur le S&P500 à 99% (2015-2020)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	47.2 %	595	Rouge	Non	Non applicable
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	44.5 %	561	Rouge	Non	Non applicable
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	47.2 %	595	Rouge	Non	Non applicable
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	44.5 %	561	Rouge	Non	Non applicable
VaR Maxima par blocs	35.7 %	450	Rouge	Non	Non applicable
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité RiskMetrics	46.9 %	591	Rouge	Non	Non applicable
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité GARCH(1,1)	44 %	554	Rouge	Non	Non applicable
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	43.7 %	550	Rouge	Non	Non applicable
VaRs par simulation et repricing					
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged repricing	0.1 %	1	Vert	Non	Oui
VaR Historique univariée	0 %	0	Vert	Non	Oui
VaR Historique bivariée	0.5 %	6	Vert	Oui	Oui
VaR Monte-Carlo normale univariée	0.1 %	1	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo normale bivariée	0.4 %	5	Vert	Oui	Oui
VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée	0.2 %	3	Vert	Non	Non

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Au niveau 99% ce sont les deux VaRs, Historique bivariée et Monte-Carlo normale bivariée qui performent le mieux en réussissant l'ensemble des tests. Les autres VaRs par simulation étant trop conservatrices.

Sur 3 ans :

Tab. 23 : Tests statistiques sur les VaRs de l'option sur le S&P500 à 99% (2015-2018)

	Traffic Light			Kupiec	Christoffersen
	%	Nombre	Zone	Concluant	Concluant
VaRs paramétriques et semi-paramétriques					
VaR Delta-normale volatilité RiskMetrics	48.6 %	368	Rouge	Non	Oui
VaR Delta-normale volatilité GARCH(1,1)	45.6 %	345	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité RiskMetrics	48.6 %	368	Rouge	Non	Oui
VaR Cornish-Fisher volatilité GARCH(1,1)	45.6 %	345	Rouge	Non	Oui
VaR Maxima par blocs	35.1 %	266	Rouge	Non	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité RiskMetrics	48.3 %	366	Rouge	Non	Oui
VaR Peaks-Over-Threshold volatilité GARCH(1,1)	44.8 %	339	Rouge	Non	Oui
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged	44.3 %	335	Rouge	Non	Oui
VaRs par simulation et repricing					
VaR ARMA(3,3)-eGARCH(2,1) sged repricing	0 %	0	Vert	Non	Oui
VaR Historique univariée	0 %	0	Vert	Non	Oui
VaR Historique bivariée	0.3 %	2	Vert	Oui	Oui
VaR Monte-Carlo normale univariée	0.1 %	1	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo normale bivariée	0 %	0	Vert	Non	Oui
VaR Monte-Carlo Student-4 bivariée	0 %	0	Vert	Non	Oui

Remarque : les colonnes % et Nombre correspondent aux dépassements

Cette fois-ci, seule la VaR Historique bivariée réussit les tests. C'est donc celle-ci que l'on retiendra.

Conclusion

Le premier enseignement de cette étude est que les mesures de risque à volatilité RiskMetrics ne sont pas satisfaisantes : elles sous-estiment systématiquement le risque et connaissent ainsi beaucoup trop de dépassements. On leur préférera donc les mesures à volatilité GARCH. En outre, la nécessité de recalibrer les modèles s'impose à la vue des résultats de backtesting sur 5 ans qui sont très mauvais.

En ce qui concerne les VaRs du S&P500, à 95% les mesures de risque à volatilité GARCH et la VaR ARMA-eGARCH sont performantes au regard du Traffic Light Test. Cependant, les deux mesures de VaR à volatilité GARCH sont trop conservatrices et échouent donc au test de Kupiec si bien que la mesure la plus adaptée est la VaR ARMA-eGARCH. On note par ailleurs que les modèles Delta-normal et Cornish-Fisher fournissent quasiment les mêmes résultats si bien que le second paraît inutile. Les ajustements de kurtosis et de skew ne sont pas nécessaires. Au niveau 99%, le constat reste le même. De plus, les mesures de risque extrêmes, calculées uniquement à ce niveau de risque, sont performantes. Celle par la méthode des blocs de maxima ne sera toutefois pas retenue car elle est incompatible avec les exigences de couverture réelles des banques. Nous retiendrons finalement encore la mesure ARMA-eGARCH car elle est la seule à réussir l'ensemble des tests statistiques.

Pour les produits dérivés linéaires comme le future sur le S&P500, les mesures paramétriques à volatilité GARCH restent de bons choix en ce qui concerne le Traffic Light Test. Trop conservatrices, elles échouent au test de Kupiec et leurs dépassements ne sont pas indépendants. Ces mesures peuvent être utilisées comme première approximation pour les besoins de couverture mais ne sont pas satisfaisantes statistiquement. Étonnement, les VaRs historiques sont plus performantes que les VaRs Monte-Carlo (assez conservatrices mais pas à outrance), ce qui justifie le choix souvent effectué par les institutions financières. Toutefois, elles ne satisfont pas l'indépendance des dépassements. La VaR ARMA-eGARCH, elle, y souscrit. Les résultats avec ou sans repricing sont les mêmes, nous retiendrons donc que le modèle semi-paramétrique ARMA-eGARCH sans repricing est le meilleur choix pour les dérivés linéaires. Étant données la gourmandise calculatoire et la difficulté de mise en œuvre de cette méthode nous notons que la VaR historique univariée peut être une alternative judicieuse pour les produits dérivés linéaires. Par extension, bien que non calculée, on peut déduire qu'elle serait une bonne alternative comme mesure de VaR du S&P500 lui-même.

Les produits non linéaires comme les options nécessitent une attention toute particulière dans l'évaluation de leurs risques. Ces instruments demandent une réévaluation pour mieux tenir compte des risques. Les

mesures paramétriques et semi-paramétriques sans repricing sont totalement inadaptées comme attendu. C'est donc sans surprise que les candidats satisfaisants se retrouvent parmi les VaRs par simulation et repricing. Dans l'ensemble, celles-ci sont très conservatrices si bien qu'elles réussissent très rarement le test de Kupiec. Au niveau 95%, la VaR ARMA-eGARCH est la moins conservatrice tout en restant dans la zone verte du Traffic Light Test : elle est donc un des meilleurs choix avec la VaR historique bivariée qui fournit des résultats comparables. Au niveau 99% c'est la VaR historique bivariée qui performe le mieux. En définitive, c'est cette dernière qui sera retenue car plus facile à mettre en oeuvre.

Nous pourrions donc résumer les enseignements de ce document comme suit :

- Les mesures sans repricing sont totalement inadaptées aux dérivés non linéaires ;
- Les meilleures mesures pour les produits linéaires (S&P500 et future sur le S&P500) sont parmi les mesures sans repricing : ARMA-eGARCH sans repricing et Historique univariée ;
- Du fait de la simplicité de sa mise en oeuvre nous constatons que le choix des institutions financières d'employer la VaR Historique est raisonnable ;
- Les meilleures mesures pour les produits dérivés non linéaires (options par exemple) sont parmi les mesures avec repricing : ARMA-eGARCH avec repricing, Monte-Carlo normale bivariée et Historique bivariée ;
- Du fait de la simplicité de sa mise en oeuvre nous constatons encore que le choix par les institutions de la VaR Historique bivariée n'est pas dénué de sens.